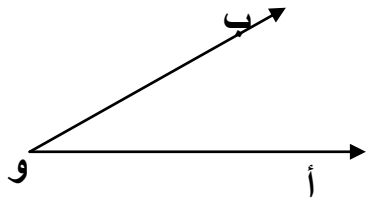
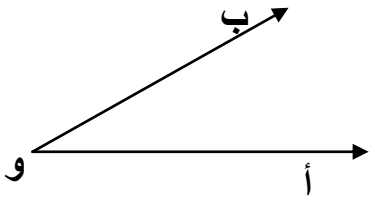
ثانيا
حساب المثلثات

الزاوية الموجهة

الزاوية الموجهة :-
هى زاوية محصورة بين ضلعين أحدهما يسمى ضلع أبتدائى والاخر يسمى ضلع نهائى ولها أتجاه يتحدد من الضلع الابتدائى الى الضلع النهائى



و أ يسمى ضلع أبتدائى
و ب يسمى ضلع نهائى
تسمى الزاوية أ و ب
لاحظ أن
ق (أ و ب) ≠ ق(ب و أ)



و ب يسمى ضلع أبتدائى
و أ يسمى ضلع نهائى
تسمى الزاوية ب و أ

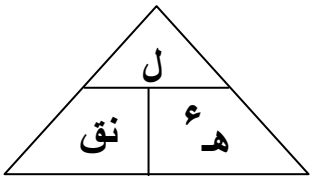
****

قياس الزاوية الموجهة

للزاوية تقسيمان من حيث القياس
(١) من حيث وحدة القياس يوجد نوعان
أ- قياس موجب ب – قياس سالب
(٢) من حيث الاشارة (أتجاه الدوران)
أ- قياس موجب ب- قياس سالب

****

أولا القياس من حيث الوحدة
(١) القياس الستينى :-
هو قياس وحداته الدرجة ، الدقيقة ، الثانية ويرمز له بالرمز س°
١° = ٦٠′ ، ١′ = ٦٠″
(٢) القياس الدائرى :-
هو قياس وحدته الدرجة الدائرية (١ ء) ويرمز له بالرمز هـ ء



القياس الدائرى لزاوية مركزية = طول القوس الذى تحصره / طول نصف قطر الدائرة

هـ ء = ل / نق ،،،، نق = ل / هـ ء ،،، ل = هـ ء × نق

مثال أوجد القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ١٠سم من دائرة طول نصف قطرها ٤سم

الحـــــــل

$هـ^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{١٠}{٤} = ٢,٥^{ء}$

****

مثال زاوية مركزية قياسها $١,٥^{ء}$ تحصر قوسا طوله ٧,٥ سم أوجد طول نصف قطر دائرتها

الحـــــــل

$نق = \frac{ل}{هـ^{ء}} = \frac{٧,٥}{١,٥} = ٥$سم

****

مثال زاوية مركزية قياسها $١,٤^{ء}$ تحصر قوساً طوله ٤سم أوجد طول القوس الذى تحصره

الحـــــــل

$ل = هـ^{ء} \times نق = ١,٤ \times ٥ = ٧$ سم

****

الزاوية النصف قطرية

هى زاوية مركزية تحصر قوسا طوله يساوى طول نصف قطر دائرتها (ل = نق) فيكون قياسها الدائرى يساوى $١^{ء}$

****

العلاقة بين القياسين الدائرى والستينى

$\frac{س^{\circ}}{١٨٠} = \frac{هـ^{ء}}{ط}$ ومنه نجد أن

(١) $س^{\circ} = \frac{هـ^{ء} \times ١٨٠}{ط}$

(٢) $هـ^{ء} = \frac{س^{\circ} \times ط}{١٨٠}$

مثال حول من القياس الستينى إلى القياس الدائرى كلا من القياسات الاتية

(١) ١٢٠ ْ **الحـــــل** هـ ء = $\frac{\text{سْ} \times \text{ط}}{١٨٠}$ = $\frac{١٢٠ \times \text{ط}}{١٨٠}$ =

	=	180	÷	Exp	×	120
	=	180	÷	Exp	×	120

(٢) ٤٠ ′ ٢٠٠ ْ **الحـــــل** هـ ء = $\frac{٤٠ ′ ٢٠٠ ْ \times \text{ط}}{١٨٠}$ =

	=	180	÷	Exp	×	,,,,	40	,,,,	200
	=	180	÷	Exp	Sh	×	,,,,	40	,,,,	200

(٢) ١٥ ″ ٢٠ ′ ١٠٠ **الحـــــل** هـ ء = $\frac{١٥ ″ ٢٠ ′ ١٠٠ ْ \times}{\text{ط}}$ =

	=	180	÷	Exp	×	,,,	15	,,,	20	,,,	100
	=	180	÷	Exp	Sh	×	,,,	15	,,,	20	,,,	100

مثال حول من القياس الدائرى إلى القياس الستينى

(١) ٠,٦ ء **الحـــــل** سْ = $\frac{٠,٦ \times ١٨٠}{\text{ط}}$

(فى الالات الحديثة)

,,,	=	Exp	÷	180	×	6	٠	0

(فى الالات القديمة)

,,,	sh	=	Exp	sh	÷	180	×	6	٠	0

---

(١) ١,٢ ء **الحـــــل** سْ = $\frac{١,٢ \times ١٨٠}{\text{ط}}$

(فى الالات الحديثة)

,,,	=	Exp	÷	180	×	2	٠	1

(فى الالات القديمة)

,,,	sh	=	Exp	sh	÷	180	×	2	٠	1

ملاحظة

إذا أعطيت القياس الدائرى بدلالة ط فإنه يحول مباشرة إلى القياس الستينى بالتعويض عن ط بـ ١٨٠ °

****

مثال حول كلا من القياسات الدائرية الاتية إلى القياس الستينى

(١) هـ^{ء} = $\frac{ط}{٢}$ **الحـــل** س° = $\frac{١٨٠}{٢}$ = ٩٠ °

(٢) هـ^{ء} = $\frac{٥ ط}{٣}$ **الحـــل** س° = $\frac{٥ \times ١٨٠}{٣}$ = ٣٠٠ °

(٣) هـ^{ء} = $\frac{٣ط}{٤}$ **الحـــل** س° = $\frac{٣ \times ١٨٠}{٤}$ = ١٣٥ °

مثال أوجد بدلالة ط القياس الدائرى لكلا من القياسات الاتية

(١) ١٢٠° **الحـــل** هـ^{ء} = $\frac{١٢٠ \times ط}{١٨٠}$ = $\frac{٢ط}{٣}$

(٢) ١٥٠ ° **الحـــل** هـ^{ء} = $\frac{١٥٠ \times ط}{١٨٠}$ = $\frac{٥ط}{٦}$

(٣) ٣١٥° **الحـــل** هـ^{ء} = $\frac{٣١٥ \times ط}{١٨٠}$ = $\frac{٧ ط}{٤}$

(٤) ٦٠° **الحـــل** هـ^{ء} = $\frac{٦٠ \times ط}{١٨٠}$ = $\frac{ط}{٣}$

مثال أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى للزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله٥سم من دائرة طول نصف قطرها ٤سم

الحـــــــل

ل = ٥سم

نق=٤سم

هـ^{ء} = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٥}{٤}$ = ١,٢٥ ^{ء}

س = $\frac{هـ^{ء} \times ١٨٠}{ط}$ = $\frac{١,٢٥ \times ١٨٠}{ط}$ =

مثال أوجد القياس الستينى للزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله٩سم من دائرة طول قطرها ١٠سم

الحـــــــل

ل = ٩سم

نق=٥سم

هـ^{ء} = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٩}{٥}$ = ١,٨ ^{ء}

س = $\frac{هـ^{ء} \times ١٨٠}{ط}$ = $\frac{١,٨ \times ١٨٠}{ط}$ =

مثال زاوية مركزية قياسها ١٢٠ ْ طول نصف قطر دائرتها ٥سم أوجد طول القوس الذى تحصره

الحـــــــل

س = ١٢٠ ْ

نق=٥سم

هـ^{ء} = $\frac{سْ \times ط}{١٨٠}$ = $\frac{١٢٠ \times ط}{١٨٠}$ = ٢,١ ^{ء}

ل = هـ^{ء} × نق = ٢,١ × ٥ = ١٠,٥ سم

مثال زاوية مركزية قياسها ١٥٠ ْ تحصر قوساً طوله $\frac{١٧ط}{٤}$ سم أوجد طول نصف قطر دائرتها

الحـــــــل

س = ١٥٠ ْ

ل = $\frac{١٧ط}{٤}$ = ١٣,٣٥

هـ^{ء} = $\frac{س \times ط}{١٨٠}$ = $\frac{١٥٠ \times ط}{١٨٠}$ = ٢,٦

نق = $\frac{ل}{هـ^{ء}}$ = $\frac{١٣,٣٥}{٢,٦}$ = ٥,٢٥ سم

مثال زاوية محيطية قياسها ٦٥° طول نصف قطر دائرتها = ٤سم أوجد طول القوس الذى تحصره

الحـــــــل

سْ = ٢ × ٦٥ ْ = ١٣٠° نق = ٤سم

هـ ء = $\frac{١٣٠ ْ \times ط}{١٨٠}$ = ٢,٣ ْ

ل = هـ ء × نق = ٢,٣ × ٤ = ٩,٢ سم

مثال زاوية محيطية قياسها ٢٠ / ٧٥° تحصر قوساً طوله ١٠سم أوجد طول نصف قطر دائرتها

الحـــــــل

سْ = ٢ × ٢٠ / ٧٥ ْ = ٤٠ / ١٥٠° ل = ١٥ سم

هـ ء = $\frac{٤٠ / ١٥٠ ْ \times ط}{١٨٠}$ = ٢,٦٣ ء

نق = $\frac{ل}{هـ ء}$ = $\frac{١٥}{٢,٦٣}$ = ٥,٧ سم

مثال أوجد القياسين الدائرى والستينى للزاوية المركزية التى تحصر قوساً طوله يساوى طول نصف قطر دائرتها (الزاوية النصف قطرية)

الحـــــــل

ل = نق

هـ ء = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{نق}{نق}$ = ١ ء سْ = $\frac{١ \times ١٨٠}{ط}$ = ٤٤// ١٧ / ٥٧ ْ

مثال أوجد القياسين الدائرى والستينى للزاوية المركزية التى تحصر قوساً طوله يساوى طول قطر دائرتها

الحـــــــل

ل = ٢نق

هـ ء = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٢نق}{نق}$ = ٢ ء سْ = $\frac{٢ \times ١٨٠}{ط}$ = ٢٩// ٣٥ / ١١٤ ْ

تمارين (١)

[أ]

[١]أوجد القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٨سم من دائرة طول نصف قطرها ٥سم

[٢]زاوية مركزية قياسها ١,٢ ء من دائرة طول نصف قطرها ٤سم أوجد طول القوس الذى تحصره

[٣]زاوية مركزية قياسها ١,٦ ء تحصر قوساً طوله ١٠ سم أوجد طول نصف قطر دائرتها

[٤] زاوية مركزية قياسها ١,٥ ء وطول قطر دائرتها ١٤سم أوجد طول القوس الذى تحصره

****

[ب] حول من القياس الدائرى إلى القياس الستينى كلا مما يأتى

[١] ٠,٧ ء [٢] ١,٦ ء [٣] ٢,٣ ء [٤] ٤,٦ ء [٥] ٥,١ ء

****

[جـ] حول من القياس الستينى إلى القياس الدائرى كلا مما يأتى

[١] ١١٠ ْ [٢] ١٧٠ ْ [٣] ٤٠ / ١٥٠ ْ [٤] ٢٥ / ٢٣٠ [٥] ١٥ // ٤٠ / ٢٠٠ ْ

****

[ء]

(١) أوجد القياسين الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٩سم من دائرة طول نصف قطرها ٦سم

(٢) زاوية مركزية قياسها ١٥٠ ْ تحصر قوساً طوله ١٠ سم أوجد طول نصف قطر دائرتها

(٣) زاوية مركزية قياسها ١٢٥ ْ طول نصف قطر دائرتها ٥سم أوجد طول القوس الذى تحصره

(٤) زاوية محيطية قياسها ٦٥ ْ طول نصف قطر دائرتها ٦سم أوجد طول القوس الذى تحصره

(٥) زاوية محيطية قياسها ٢٥ / ٧٠ ْ تحصر قوساً طوله ٢٠ سم لأوجد طول نصف قطر دائرتها

(٦) أوجد القياسين الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله يساوى طول نصف قطر دائرتها

(٧) أوجد القياسين الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله يساوى طول قطر دائرتها

(٨) أوجد القياسين الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٢ ط من دائرة طول نصف قطرها ٣سم

****

[هـ] أوجد القياس الستينى لكلا مما ياتى

(١) $\frac{ط}{٥}$ (٢) $\frac{ط}{٦}$ (٣) $\frac{٣ط}{٤}$ (٤) $\frac{٤ط}{٣}$ (٥) $\frac{٥ط}{٦}$ (٦) $\frac{ط}{٧}$

****

[و] أوجد بدلالة ط القياس الدائرى لكلا مما يأتى

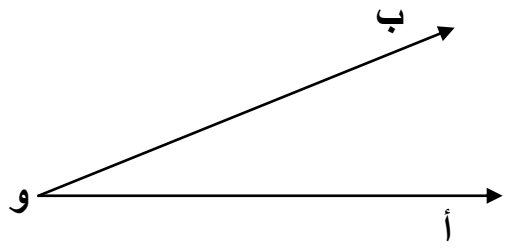
(١) ٢١٠ (٢) ١٣٥ (٣) ٢٢٥ ْ (٤) ٣٣٠ (٥) ٢٤٠ ْ (٦) ٣١٥ ْ

القياس من حيث الاشارة

ينقسم القياس من حيث الاشارة إلى

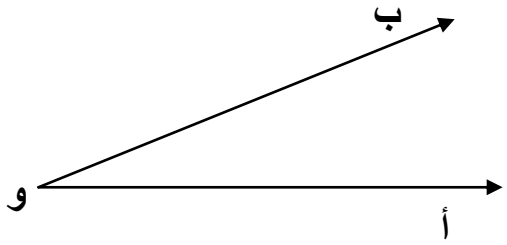
(١) القياس الموجب

يكون قياس الزاوية الموجهة موجبا إذا كان أتجاه الدوران من الضلع الأبتدائى إلى الضلع النهائى ضد حركة عقارب الساعة



(١) القياس السالب

يكون قياس الزاوية الموجهة سالبا إذا كان أتجاه الدوران من الضلع الأبتدائى إلى الضلع النهائى مع حركة عقارب الساعة



للتحويل من قياس سالب إلى قياس موجب

القياس الستينى السالب = القياس الستينىالموجب ـ ٣٦٠

القياس الدائرى السالب = القياس الدائرى الموجب ـ ٢ط (بدلالة ط)

للتحويل من قياس موجب إلى قياس سالب

القياس الستينى الموجب = القياس الستينى السالب + ٣٦٠

القياس الدائرى الموجب = القياس الدائرى السالب + ٢ط (بدلالة ط)

مثال **حول كلا من القياسات الموجبة الاتية إلى القياس السالب**

(١) ١٥٠ °

الحـــــل

القياس السالب = ١٥٠ ـ ٣٦٠ =ـ ٢١٠

(٢) ٤٠ ′ ١٠٠ °

الحـــــل

القياس السالب= ٤٠ ′ ١٠٠ ° ـ ٣٦٠ °

(٣) ٢٥ ″ ٥٠ ′ ٢٠٠ °

الحـــــل

القياس السالب = ٢٥ ″ ٥٠ ′ ٢٠٠ ° ـ ٣٦٠

= ـ ٣٥ ″ ٩ ′ ١٥٩ °

= ـ ٢٠ / ٢٥٩ °

مثال حول كلا من القياسات الدائرية الموجبة الاتية إلى القياس السالب

(١) $\frac{ط}{٣}$

الحـــــل

القياس السالب = $\frac{ط}{٣}$ ـ ٢ ط

= $\frac{ط - ٦ ط}{٣}$ = $\frac{ـ ٥ط}{٣}$

(٢) $\frac{٥ ط}{٤}$

الحـــــل

القياس السالب = $\frac{٥ ط}{٤}$ ـ ٢ ط

= $\frac{٥ط - ٨ط}{٤}$ = $\frac{ـ ٣ط}{٤}$

مثال حول كلا من القياسات السالبة الاتية إلى القياس الموجب

(١) ـ ١٢٠ °

الحـــــل

القياس الموجب = ـ ١٢٠ ° + ٣٦٠ ° = ٢٤٠ °

(٢) ـ ٥٠ / ٢٠٠ °

الحـــــل

الفياس الموجب = ـ ٥٠ / ٢٠٠ ° + ٣٦٠

= ١٠ / ١٥٩ °

(٣) ـ ٢٠ / ٣٥ / ١٦٥ °

الحـــــل

القياس الموجب = ـ ٢٠ / ٣٥ / ١٦٥ ° + ٣٦٠

= ٤٠ // ١٤ / ١٩٤ °

(٤) $\frac{ـ ط}{٥}$

الحـــــل

القياس الموجب = $\frac{ـ ط}{٥}$ + ٢ ط

= $\frac{ـ ط + ١٠ط}{٥}$ = $\frac{٩ط}{٥}$

(٥) $\frac{ـ ٣ط}{٤}$

الحـــــل

القياس الموجب = $\frac{ـ ٣ط}{٤}$ + ٢ ط

= $\frac{ـ ٣ط + ٨ط}{٤}$ = $\frac{٥ط}{٤}$

(٦) ـ ط

الحـــــل

القياس الموجب = ـ ط + ٢ ط = ط

تمـــــارين(٢)

[أ] حول من القياس الموجب إلى القياس السالب

(١) ١٣٠ ْ (٢) ٢١٥ ْ (٣) ٣٠٠ ْ

(٤) ٢٠ / ١٠٠ ْ (٥) ١٥ / ١٣٣ ْ (٦) ٣٥ / ١٦٥ ْ

(٧) ٢٥ // ٤٠ / ١٢٥ ْ (٨) ٤٠ // ٣٥ / ٥٥ ْ (٩) ٥٠ // ٣٠ / ٢١٥ ْ

(١٠) $\frac{ط}{٥}$ (١١) $\frac{ط}{٦}$ (١٢) $\frac{٣ط}{٤}$

(١٣) $\frac{٤ط}{٣}$ (١٤) $\frac{٥ط}{٦}$ (١٥) $\frac{ط}{٧}$

****

[ب] حول من القياس السالب إلى القياس الموجب

(١) - ١٤٠ ْ (٢) - ٢٤٥ ْ (٣) - ٣٠٨ ْ

(٤) - ٢٠ / ١٥٠ ْ (٥) - ٤٥ / ١٣٧ ْ (٦) - ٣٥ / ١٧٥ ْ

(٧) - ٢٥ // ٤٥ / ٣٢٥ ْ (٨) - ٤٠ // ٥٥ / ١٠٠ ْ (٩) - ٢٠ // ٣٠ / ٢٧٥ ْ

(١٠) $\frac{-ط}{٥}$ (١١) $\frac{-ط}{٦}$ (١٢) $\frac{-٣ط}{٤}$

(١٣) $\frac{٤ط}{٣}$ (١٤) $\frac{٥ط}{٦}$ (١٥) $\frac{ط}{٧}$

****

س أكمل العبارات الاتية

١- يكون قياس الزاوية الموجهة موجباً إذا كان أتجاه الدوران من الضلع الأبتدائى إلى الضلع النهائى ..... حركة عقارب الساعة

٢- يكون قياس الزاوية الموجهة سالباً إذا كان أتجاه الدوران من الضلع الأبتدائى إلى الضلع النهائى ..... حركة عقارب الساعة

٣- الزاوية التى قياسها الموجب ط يكون القياس السالب المكافئ لها هو .....

٤- أكبر قياس سالب مكافئ للزاوية التى قياسها ١٣٠٠ْ هو.....

٥- أصغر قياس موجب مكافئ للزاوية التى قياسها – ١٠٠٠ هو .....

الزوايا المتكافئة :-

هى الزوايا التى لها نفس الشعاع النهائى وتنتج بأضافة أو طرح (٣٦٠° أو ٢ ط) من القياس حسب نوعه

هـ = هـ ± ن × ٣٦٠° (إذا كان القياس ستينى

هـ = هـ ± ٢ ن ط (إذا كان القياس دائرى بدلالة ط) فمثلا

٣٠° = ٣٠+٣٦٠ = ٣٩٠

= ٣٠ +٢ × ٣٦٠ = ٧٥٠

= ٣٠ +٣ × ٣٦٠ = ١١١٠

$\frac{ط}{٥} = \frac{ط}{٥} + ٢ط = \frac{ط + ١٠ط}{٥} = \frac{١١ط}{٥}$

$= \frac{١١ط}{٥} + ٢ط = \frac{١١ط + ١٠ط}{٥} = \frac{٢١ط}{٥}$

ولهذا فإن الزاوية

٣٠° = ٣٩٠° = ٧٥٠° = ١١١٠°

****

٣٠ = ٣٠ +٢ ط = ٣٠ +٤ ط = ٣٠ +٦ط = ٣٠ +٨ ط = ٣٠+١٠ط = وهكذا

لكن

٣٠ + ط = ٣٠ + ٣ ط = ٣٠ +٥ ط = ٣٠ +٧ط = ٣٠ +٩ ط = ١١٠°

وكذلك

٣٠ = ٣٠ – ٣٦٠ = - ٣٣٠°

٣٠ = ٣٠ – ٢ × ٣٦٠ = - ٦٩٠°

٣٠ = ٣٠ – ٣ × ٣٦٠° = - ١١٥٠

خلاصة القول

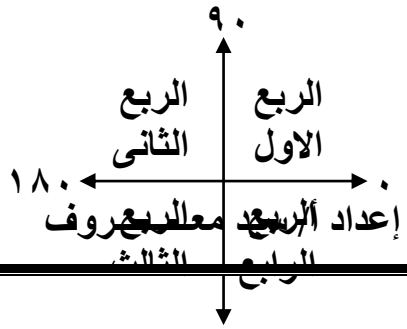
أن الزاوية لا تتغير أذا أضيف إليها عدد كامل من الدورات أو طرح منها عدد كامل من الدورات

****

لاحظ أن

(١) إذا كانت ٠ < س < ٩٠° فإن س تقع فى الربع الاول

(٢) إذا كانت ٩٠ < س < ١٨٠° فإن س تقع فى الربع الثانى



(٣) إذا كانت ١٨٠ < س < ٢٧٠° فإن س تقع فى الربع الثالث

(٤) إذا كانت ٢٧٠ < س < ٣٦٠° فإن س تقع فى الربع الرابع

٢٧٠

مثال حدد الربع الذى تقع فيه كلا من الزوايا التى قياسها كالاتى

(١) ١٢٠٠°

الحـــــــل

١٢٠٠ = ١٢٠٠ ـ ٣٦٠ = ٨٤٠ ـ ٣٦٠ = ٤٨٠ ـ ٣٦٠ = ١٢٠°

الزاوية التى قياسها ١٢٠٠ تقع فى الربع الثانى

****

(٢) ـ ١٥٠٠

الحـــــــل

ـ ١٥٠٠ = ـ ١٥٠٠ + ٣٦٠ = ـ ١١٤٠ + ٣٦٠ = ـ ٧٨٠ + ٣٦٠ = ـ ٤٢٠ + ٣٦٠ = ـ ٦٠

= ـ ٦٠ + ٣٦٠ = ٣٠٠

الزاوية التى قياسها ـ ١٥٠٠ تقع فى الربع الرابع

****

(٣) $\frac{١٧ط}{٣}$

الحـــــــل

$\frac{١٧ط}{٣} = \frac{١٧ \times ١٨٠}{٣} = ١١٢٠ = ١١٢٠ - ٣٦٠ = ٧٦٠ - ٣٦٠ = ٤٠٠ - ٣٦٠ = ٤٠°$

الزاوية التى قياسها $\frac{١٧ط}{٣}$ تقع فى الربع الاول

****

(٤) $\frac{-١٩ط}{٤}$

الحـــــــل

$\frac{-١٩ط}{٤} = \frac{-١٩ \times ١٨٠}{٤} = -٨٥٥ = -٨٥٥ + ٣٦٠ = -٤٩٥ + ٣٦٠ = -١٣٥ + ٣٦٠ = ٢٢٥$

الزاوية التى قياسها $\frac{-١٩ط}{٤}$ تقع فى الربع الثالث

بســــــــــــم الله الرحمن الرحيم

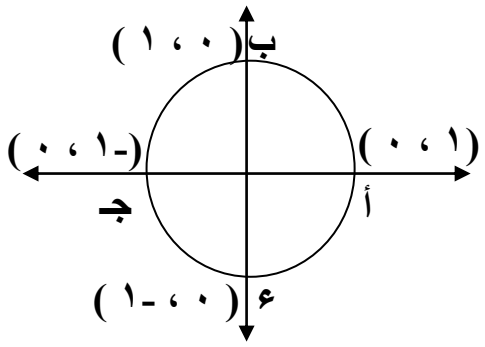
حساب المثلثات

الفصل الثانى

الدوال المثلثية

إعداد أ/ سيد معـــــــــروف

الدوال المثلثية



دائرة الوحدة :-

هى دائرة مركزها نقطة الاصل و(٠ ، ٠)

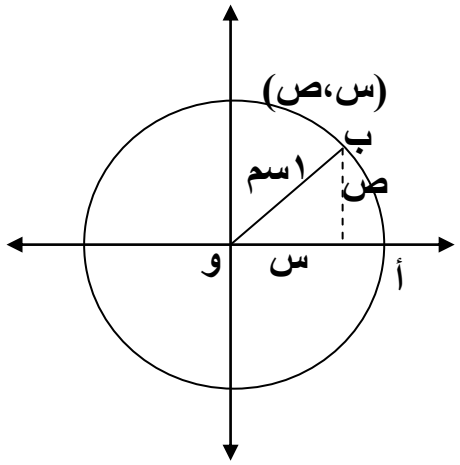
وطول نصف قطرها ١سم تقطع محورى

الاحداثيات فى أربعة نقط هى على الترتيب

أ=(١ ، ٠) ،،،، ب = (٠ ، ١)

جـ = (-١ ، ٠) ،،، ء = (٠ ، -١)

****



إذا فرض وجود نقطة ب = (س ، ص) هذه النقطة فى أى موضع تكون زاوية أ و ب يمكن تعريف مجموعة من الدوال المثلثية لهذه الزاوية وهذه الدوال تعتمد على الاحداثيين السينى والصادى لنقطة ب وهى كالاتى

(١) دالة الجيب (جا sin)

جا (أ و ب) = الاحداثى الصادى لنقطة ب=ص

(٢) دالة جيب التمام (جتا cos)

جتا (أ و ب) = الاحداثى السينى لنقطة ب = س

(٣) دالة الظل (ظا tan)

الاحداثى الصادى / الاحداثى السينى = ص / س

(٤) دالة قاطع التمام (قتا)

قتا(أ و ب) = ١ / الاحداثى الصادى = ١ / ص

****

(٥) دالة القاطع (قا)

قا(أ و ب) = ١ / الاحداثى السينى = ١ / س

****

(٦) دالة ظل التمام (ظتا)

الاحداثى السينى / الاحداثى الصادى = س / ص

ظا(أ و ب) = = ظتا(أ و ب) = =

ملخص الدوال المثلثية

إذا كانت زاوية أ و ب = هـ تقطع دائرة الوحدة فى نقطة ب = (س ، ص) فإن

جا هـ = ص قتا هـ = $\frac{١}{ص}$

جتاهـ = س قاهـ = $\frac{١}{س}$

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ظتاهـ = $\frac{س}{ص}$

ملاحظة هامة جداً
الاحداثى الصادى والسينى لنقطة ب يرتبطان بالعلاقة س^{٢} + ص^{٢} = ١

****

مثال إذا كانت أ و ب زاوية فى وضعها القياسى تقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب أوجد جميع الدوال المثلثية لها إذا كانت

(١) ب = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

الحـــــــــــل

جاهـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ قتاهـ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

جتاهـ = $\frac{١}{٢}$ قـاهـ = ٢

ظاهـ = $\frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٣}$ ظتاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٢) ب = (٠,٦ ، ٠,٨)

الحـــــــــــل

جاهـ = $\frac{٨}{١٠}$ قتاهـ = $\frac{١٠}{٨}$

جتاهـ = $\frac{٦}{١٠}$ قاهـ = $\frac{١٠}{٦}$

ظاهـ = $\frac{\frac{٨}{١٠}}{\frac{٦}{١٠}}$ = $\frac{٨}{٦}$ ظتاهـ = $\frac{٦}{٨}$

(٣) (س ، $\frac{١}{٢}$) حيث س > ٠

الحـــــــــــل

نوجد الاحداثى السينى من العلاقة

س^{٢} + ص^{٢} = ١

س^{٢} + ($\frac{١}{٢}$)^{٢} = ١

س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ = ١

س^{٢} = ١ - $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

س = $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب = ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

جاهـ = $\frac{١}{٢}$ قتاهـ = ٢

جتا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ قاهـ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ظاهـ = $\frac{\frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ظتاهـ = $\sqrt{٣}$

(٤) (س ، س) حيث س < ٠

الحـــــــــــل

نوجد أولا قيمة س

$س^٢ + س^٢ = ١$

$٢س^٢ = ١$

$س^٢ = \frac{١}{٢}$

س = $\sqrt{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$

∴ إحداثيات ب = ($\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$)

الحـــــــــــــــــل

جاهـ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ قتاهـ = $-\sqrt{٢}$

جتاهـ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ قاهـ = $-\sqrt{٢}$

ظاهـ = $\frac{\frac{-١}{\sqrt{٢}}}{\frac{-١}{\sqrt{٢}}}$ = ١ ظتاهـ = ١

****

تـــــدريب

إذا كانت أ و ب زاوية فى وضعها القياسى تقطع دائرة الوحدة فى نقطة ب أوجد جميع الدوال المثلثية لها إذا كانت

(١) إحاثيات نقطة ب = (١ ، ٠)

(٢) إحداثيات نقطة ب = ($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$)

(٣) إحاثيات نقطة ب = (س، ٠,٦)حيث س>٠

(٤) إحداثيات نقطة ب = ($\frac{٢}{٣}$،ص) حيث ص <٠

(٥) إحاثيات نقطة ب = (- س، - س)حيث س>٠

(٦) إحداثيات نقطة ب = (س، ١)

(٧) إحاثيات نقطة ب = (٣أ ، ٤أ)حيث أ>٠

(٨) إحداثيات نقطة ب = (س،٢س)حيث س>٠

(٩) إحاثيات نقطة ب = (٢ص، ٣ص)، ص<٠

(١٠) إحداثيات نقطة ب = (-١، ص)

(١١) إحاثيات نقطة ب = (٦س،٨س)س<٠

(١٢) إحداثيات نقطة ب = ($\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ، ص)،ص>٠

(١٣) إحاثيات نقطة ب = (س ، $\frac{٣}{٤}$) س>٠ (١٤) إحداثيات نقطة ب = ($\frac{\sqrt{٢}}{٣}$، ص)، ص <٠

إشارة الدوال المثلثية

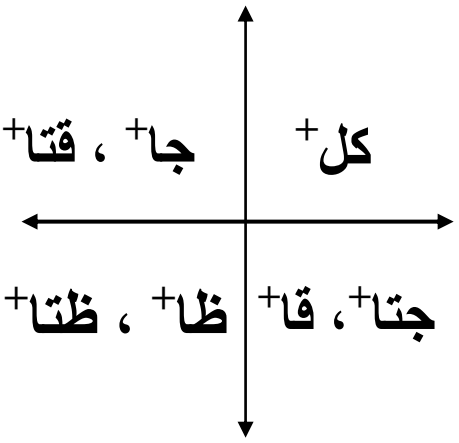
تختلف أشارة الدوال المثلثية بإختلاف الربع الذى تقع فيه الزاوية وذلك على حسب أشارة س ، ص فى كل ربع فمثلا

(١) فى الربع الاول س(موجبة) ، ص (موجبة) ولهذا فإن جتا(موجبة) ، جا(موجبة) ، ظا(موجبة)

(٢) فى الربع الثانى س(سالبة) ، ص (موجبة) ولهذا فإن جتا(سالبة) ، جا(موجبة) ، ظا(سالبة)

(١) فى الربع الثالث س(سالبة) ، ص (سالبة) ولهذا فإن جتا(سالبة) ، جا(سالبة) ، ظا(موجبة)

(١) فى الربع الرابع س(موجبة) ، ص (سالبة) ولهذا فإن جتا(موجبة) ، جا(سالبة) ، ظا(سالبة)



**********.

(١) دالة الجيب (جاس)

موجبة فى الربعين(الاول والثانى) ********** سالبة فى الربعين (الثالث والرابع)

(٢) دالة جيب التمام (جتاس)

موجبة فى الربعين (الأول والرابع) ********** سالبة فى الربعين (الثانى والثالث)

(٣) دالة الظل (ظاس)

موجبة فى الربعين (الأول والثالث) **********سالبة فى الربعين (الثانى والرابع)

****

فمثلا

- جا١٠٠ (موجبة) لان ١٠٠ ° تقع فى الربع الثانى والـ جا فى الربع الثانى موجبة
- جتا١٠٠ (سالبة) لان ١٠٠ ° تقع فى الربع الثانى والـ جتا فى الربع الثانى سالبة
- ظا١٠٠ (سالبة) لان ١٠٠ ° تقع فى الربع الثانى والـ ظا فى الربع الثانى سالبة

تدريب أكمل العبارات الاتية

(١) أشارة ظا١٥٠ تكون .....
(٢) أشارة قا١٠٠ تكون .....
(٣) أشارة قتا٣٠٠ تكون .....
(٤) أشارة جا ٢٢٥ تكون .....
(٥) أشارة جتا ٣٣٠ تكون .....
(٦) أشارة ظتا٦٠ تكون .....
(٧) أشارة ظا٥٠ تكون .....
(٨) أشارة قا٢١٠ تكون .....
(٩) أشارة قتا١٤٠ تكون .....
(١٠) أشارة جا ١٣٠ تكون .....
(١١) أشارة جتا ٢٣٠ تكون .....
(١٢) أشارة ظتا١٧٠ تكون .....
(١٣) أشارة ظا٢٠٠ تكون .....
(١٤) أشارة قا٧٠ تكون .....
(١٥) أشارة قتا٢٥٠٠ تكون .....
(١٦) أشارة جا ٣٢٥ تكون .....
(١٧) أشارة جتا ١٦٠ تكون .....
(١٨) أشارة ظتا٢٤٠ تكون .....
(١٩) أشارة ظا٣١٠ تكون .....
(٢٠) أشارة قا٣٢٠ تكون .....
(٢١) أشارة قتا٨٠ تكون .....
(٢٢) أشارة جا ٧٥ تكون .....
(٢٣) أشارة جتا ٣٠ تكون .....
(٢٤) أشارة ظتا٣٠٠ تكون .....
(٢٥) أشارة جا(-١٠٠) تكون.....
(٢٦) أشارة ظا(-٣٠٠) تكون .....
(٢٧) أشارة جتا(-١٥٠) تكون.....
(٢٨) أشارة ظتا(-٣٠) تكون .....
(٢٩) أشارة قا(-٢٠٠) تكون.....
(٣٠) أشارة قا(-٢٠٠٠) تكون .....
(٣١) أشارة قتا(-٣٠٠) تكون.....
(٣٢) أشارة ظا(-١٠٠٠) تكون .....
(٣٣) أشارة جا(١٠٠٠) تكون.....
(٣٤) أشارة ظا(٢٠٠٠) تكون .....
(٣٥) إذا كانت جاس > ٠ ، جتاس < ٠ فإن س تقع فى الربع .....
(٣٦) إذا كانت جاس > ٠ ، جتاس > ٠ فإن س تقع فى الربع .....
(٣٧) إذا كانت جاس < ٠ ، جتاس < ٠ فإن س تقع فى الربع .....
(٣٨) إذا كانت جاس < ٠ ، جتاس > ٠ فإن س تقع فى الربع .....

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الزاوية	٠	٩٠ ْ	١٨٠ ْ	٢٧٠ ْ	٣٦٠ ْ	٣٠ ْ	٦٠ ْ	٤٥ ْ
النقطة	(١ ، ٠)	(٠ ، ١)	(-١، ٠)	(٠ ،-١)	(١ ، ٠)	$(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، \frac{١}{٢})$	$(\frac{١}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$	$(\frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٢}})$
جـــا	٠	١	٠	-١	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
جتـــا	١	٠	-١	٠	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظـــا	٠	غيرمعرف	٠	غير معرف	٠	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

****

مثال بدون أستخدام الحاسبة أوجد قيمة كلا من المقادير الاتية

(١) جا٦٠ جتا٣٠ + جتا٦٠ جا٣٠

الحـــــــل

المقدار = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$

****

(٢) جا^{٢} ٤٥ + ظا٤٥ - جتا١٨٠

الحـــــــل

المقدار = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢} + ١ - (-١) = \frac{١}{٢} + ١ + ١ = ٢,٥$

****

(٣) قا٦٠ + ظا^{٢} ٦٠ + جا ٢٧٠

الحـــــــل

المقدار = ٢ + ($\sqrt{٣}$)^{٢} + (-١) = ٢+٣ – ١ = ٤

مثال بدون أستخدام الحاسبة إثبت أن

(١) جا٩٠ = ٢ جا٤٥ جتا٤٥

الحـــــــل

الايمن = ١

الايسر = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١

∴ الطرفان متساويان

(٢) جتا٦٠ = ٢ جتا^{٢} ٣٠ – ١

الحـــــــل

الايمن = $\frac{١}{٢}$

الايسر= ٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)^{٢} – ١ =٢ × $\frac{٣}{٤}$ - ١

= $\frac{٣}{٢}$ - ١ = $\frac{١}{٢}$

(٣) جا٣٠ قا٦٠ + ظا٤٥ قتا٩٠ +٢جتا١٨٠=٠

الحـــــــل

الايمن= $\frac{١}{٢}$ × ٢ + ١ × ١ +٢ (- ١)

= ١ + ١ – ٢

= ٢ – ٢ = صفر

(٤) جا^{٣} ٣٠ = ٩ جتا^{٣} ٦٠ – ظتا^{٢} ٤٥

الحـــــــل

الايمن = ($\frac{١}{٢}$)^{٣} = $\frac{١}{٨}$

الايسر = ٩ ($\frac{١}{٢}$)^{٣} – (١)^{٢} = ٩ × $\frac{١}{٢}$ - ١

= $\frac{٩}{٨}$ - ١ = $\frac{١}{٨}$

(٥) جتا٦٠ جتا٣٠ – جا٦٠ جا٣٠ = صفر

الحـــــــل

الايمن = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

= $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ = صفر

∴ الطرفان متساويان

∴ الطرفان متساويان

مثال بدون إستخدام الحاسبة أوجد قيمة س حيث ٠° < س < ٩٠ التى تحقق أن

(١) جاس = ٢ جا٤٥ جتا٤٥

الحـــــــل

جاس = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جاس = ٢ × $\frac{١}{٢}$

جاس = ١

س = ٩٠°

(٢) ظاس = ٢ جا٦٠

الحـــــــل

ظاس = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظـــــاس = $\sqrt{٣}$

س = ٦٠°

(٣) قتاس = ٢ جا٩٠

الحـــــــل

قتاس = ٢ × ١ = ٢

س = ٦٠°

(٤) ظاس = ٤ جا٣٠ جتا٦٠

الحـــــــل

ظاس = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظاس = ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

ظاس = $\sqrt{٣}$

س = ٦٠°

(٥) ظتاس = ٤ جا٣٠ جتا٣٠

الحـــــــل

ظتاس = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظتاس = $\sqrt{٣}$

س = ٣٠°

خواص الدوال المثلثية

(١) العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين هـ ، ٩٠ – هـ

جا (٩٠ – هـ) = جتا هـ	قتا (٩٠ – هـ) = قاهـ
جتا(٩٠ – هـ) = جاهـ	قا(٩٠ – هـ) = قتاهـ
ظا(٩٠ – هـ) = ظتاهـ	ظتا(٩٠ – هـ) = ظاهـ

لاى زاويتين س ، ص مجموعهما = ٩٠ فإن

جاس = جتاص ، قتاس = قاص ، ظاس = ظتاص .....وهكذا

ملاحظة هامة :-

(١) إذا كان جاس = جتاص فإن س + ص = ٩٠ °

(٢) إذا كان قتاس = قاص فإن س + ص = ٩٠ °

(٣) إذا كان ظاس = ظتاص فإن س + ص = ٩٠

****

أكمل العبارات الاتية

(١) جا٥٠ = جتا .....

(٢) ظا٣٠ = ظتا.....

(٣) قتا٧٠ = قا .....

(٤) قا ٦٥ = قتا .....

(٥) ظتا٨٠ = ظا .....

(٦) جتا٥٥ = جا .....

(٧) جا٧٥ = جتا.....

(٨) ظا ٨٥ = ظتا .....

(٩) قا٢٧ = قتا .....

(١٠) ظتا ٣١ = ظا .....

(١١) جتا٧٢ = جا .....

(١٢) قتا ٥٤ = قا .....

(١٣) إذا كان جاس = جتاص فإن س+ ص = ...

(١٤) إذا كان قتاس = قاص فإن س + ص = ...

(١٥) إذا كان ظتاس = ظاص فإن س + ص = ...

(١٦) إذا كان جا٤٠ = جتاص فإن ص = ...

(١٧) إذا كان جاس = جتا٢س فإن س = ...

(٢١) جتا(٩٠ – س) = ...

(٢٢) ظتا(٩٠ – هـ) = ...

(٢٣) جا٢٠ / ٥٠ ° = جتا .....

(٢٤) جتا٢٥ / ٣٠ ° = جا .....

(٢٥) ظا ٥٠ / ٢٠ ° = ظتا .....

(١٨) إذا كان ظا٢س = ظتا٣س فإن س = ...

(١٩) إذا كان جاس = جتاس فإن س = ...

(٢٠) جا(٩٠ – س) = ...

(٢٦) قا(٩٠ – ص) = ...

(٢٧) قتا(٩٠ – ن) = ...

(٢٨) ظا(٩٠ – ع) = ...

مثال أوجد قيمة س التى تحقق كلا مما يأتى

(١) ظاس = ظتا٢ س

الحـــــل

س + ٢ س=٩٠

٣س = ٩٠

س = ٣٠

(٢) جا٤س = جتا٥س

الحـــــل

٤س +٥س = ٩٠

٩س = ٩٠

س= ١٠

(٣) جتا(س +٢٠) = جا(س + ٥٠)

الحـــــل

س +٢٠ + س +٥٠ = ٩٠

٢س +٧٠ = ٩٠

٢س = ٩٠ – ٧٠

٢س = ٢٠

س = ١٠

(٤) قتا(س+١٠) = قا(س – ٤٠)

الحـــــل

س +١٠ + س – ٤٠ = ٩٠

٢س – ٣٠ = ٩٠

٢س = ٩٠ +٣٠

٢س = ١٢٠

س = ٦٠

(٥) ظتا(٢س – ٣٠) = ظا (٣ش + ١٠)

الحـــــل

٢س – ٣٠ +٣ س +١٠ = ٩٠

٥س – ٢٠ = ٩٠

٥س = ٩٠ +٢٠

٥س = ١١٠

س = ٢٢ °

(٦) جا(س +٤٠) = جتا (س + ٢٠)

الحـــــل

س +٤٠ + س +٢٠ = ٩٠

٢س +٦٠ = ٩٠

٢س = ٩٠ – ٦٠

٢س = ٣٠

س = ١٥ °

(٧) ظا٤س ظا٥س = ١

ظا٤س = $\frac{١}{\text{ظا٥س}}$

ظا٤ س = ظتا٥ س

٤ س + ٥ س = ٩٠ °

٩ س = ٩٠ °

س = $\frac{٩٠}{٩}$ °

س = ١٠ °

ثانيا : العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين هـ ، ١٨٠ – هـ

جا (١٨٠ – هـ) = جا هـ	قتا (١٨٠ – هـ) = قتاهـ
جتا(١٨٠ – هـ) = ـ جتاهـ	قا(١٨٠ – هـ) = ـ قاهـ
ظا(١٨٠ – هـ) = ـ ظاهـ	ظتا(١٨٠ – هـ) = ـ ظتاهـ

تستخدم هذه العلاقات فى إيجاد الدوال المثلثية للزوايا ١٢٠ ، ١٥٠ ، ١٣٥

جا١٢٠= جا(١٨٠ – ٦٠) = جا٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ومنه قتا١٢٠ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

جتا١٢٠ = جتا (١٨٠ – ٦٠) = ـ جتا٦٠ = $\frac{-١}{٢}$ ومنه قا١٢٠ = ـ٢

ظا١٢٠ = ظا (١٨٠ – ٦٠) = ـ ظا ٦٠ = ـ $\sqrt{٣}$ ومنه ظتا١٢٠ = ـ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

****

جا١٥٠= جا(١٨٠ – ٣٠) = جا٣٠ = $\frac{١}{٢}$ ومنه قتا١٥٠ = ٢

جتا١٥٠ = جتا (١٨٠ – ٣٠) = ـ جتا٣٠ = ـ$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ومنه قا١٥٠ = ـ $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ظا١٥٠ = ظا (١٨٠ – ٣٠) = ـ ظا ٣٠ = ـ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنه ظتا١٥٠ = ـ $\sqrt{٣}$

****

جا١٣٥= جا(١٨٠ – ٤٥) = جا٤٥= $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ومنه قتا١٣٥ = $\sqrt{٢}$

جتا١٣٥ = جتا (١٨٠ – ٤٥) = ـ جتا٤٥ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ومنه قا١٣٥ = ـ $\sqrt{٢}$

ظا١٣٥ = ظا (١٨٠ – ٤٥) = ـ ظا ٤٥ = ـ ١ ومنه ظتا١٣٥ = ـ١

ثالثا : العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين هـ ، ١٨٠ + هـ

جا (١٨٠ + هـ) = - جا هـ	قتا (١٨٠ + هـ) = - قتاهـ
جتا(١٨٠ + هـ) = - جتاهـ	قا(١٨٠ + هـ) = - قاهـ
ظا(١٨٠ + هـ) = ظاهـ	ظتا(١٨٠ + هـ) = ظتاهـ

تستخدم هذه العلاقات فى إيجاد الدوال المثلثية للزوايا ٢١٠ ، ٢٤٠ ، ٢٢٥

جا٢٤٠= جا(١٨٠ + ٦٠) = - جا٦٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ومنه قتا٢٤٠ = - $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

جتا٢٤٠ = جتا (١٨٠ + ٦٠) = - جتا٦٠= $\frac{-١}{٢}$ ومنه قا٢٤٠ = - ٢

ظا٢٤٠ = ظا (١٨٠ + ٦٠) = ظا ٦٠ = $\sqrt{٣}$ ومنه ظتا٢٤٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

****

جا٢١٠= جا(١٨٠+ ٣٠) = - جا٣٠ = $\frac{-١}{٢}$ ومنه قتا٢١٠= - ٢

جتا٢١٠ = جتا (١٨٠ + ٣٠) = - جتا٣٠ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ومنه قا٢١٠ = - $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ظا٢١٠ = ظا (١٨٠ + ٣٠) = ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنه ظتا٢١٠ = $\sqrt{٣}$

****

جا٢٢٥= جا(١٨٠ + ٤٥) = - جا٤٥= $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ومنه قتا٢٢٥ = - $\sqrt{٢}$

جتا٢٢٥ = جتا (١٨٠ + ٤٥) = - جتا٤٥ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ومنه قا٢٢٥ = - $\sqrt{٢}$

ظا٢٢٥ = ظا (١٨٠ + ٤٥) = ظا ٤٥ = ١ ومنه ظتا٢٢٥ = ١

رابعا : العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين هـ ، ٣٦٠ ـ هـ

جا (٣٦٠ ـ هـ) = ـ جا هـ	قتا (٣٦٠ ـ هـ) = ـ قتاهـ
جتا(٣٦٠ ـ هـ) = جتاهـ	قا(٣٦٠ ـ هـ) = قاهـ
ظا(٣٦٠ ـ هـ) = ـ ظاهـ	ظتا(٣٦٠ ـ هـ) = ـ ظتاهـ

تستخدم هذه العلاقات فى إيجاد الدوال المثلثية للزوايا ٣٠٠ ، ٣٣٠ ، ٣١٥

جا٣٠٠= جا(٣٦٠ ـ ٦٠) =ـ جا٦٠ = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ومنه قتا٣٠٠ = ـ $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

جتا٣٠٠ = جتا (٣٦٠ ـ ٦٠) = جتا٦٠ = $\frac{١}{٢}$ ومنه قا٣٠٠ = ٢

ظا٣٠٠ = ظا (٣٦٠ ـ ٦٠) = ـ ظا ٦٠ = ـ $\sqrt{٣}$ ومنه ظتا٣٠٠= ـ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

****

جا٣٣٠= جا(٣٦٠ ـ ٣٠) = ـ جا٣٠ = $\frac{-١}{٢}$ ومنه قتا٣٣٠= ـ ٢

جتا٣٣٠ = جتا (٣٦٠ ـ ٣٠) = جتا٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ومنه قا٣٣٠= $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ظا٣٣٠ = ظا (٣٦٠ ـ ٣٠) = ـ ظا ٣٠ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ومنه ظتا٣٣٠= ـ $\sqrt{٣}$

****

جا٣١٥= جا(٣٦٠ ـ ٤٥) = ـ جا٤٥= $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ومنه قتا٣١٥ = ـ $\sqrt{٢}$

جتا٣١٥ = جتا (٣٦٠ـ ٤٥) = جتا٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ومنه قا٣١٥ = $\sqrt{٢}$

ظا٣١٥ = ظا (٣٦٠ ـ ٤٥) = ـ ظا ٤٥ = ـ ١ ومنه ظتا٣١٥ = ـ١

خامساً : العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين هـ ، – هـ

جا (– هـ) = ـ جا هـ	قتا (– هـ) = ـ قتاهـ
جتا(– هـ) = جتاهـ	قا(– هـ) = قاهـ
ظا(– هـ) = ـ ظاهـ	ظتا(– هـ) = ـ ظتاهـ

جا(- ٣٠) = ـ جا٣٠ = $\frac{-١}{٢}$ طريقة أخرى جا(-٣٠) = جا٣٣٠ = جا(٣٦٠- ٣٠)=- جا٣٠ = $\frac{-١}{٢}$

جتا(-٣٠) = جتا٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ طريقة أخرى جتا(-٣٠) = جتا٣٣٠=جتا(٣٦٠- ٣٠) = جتا٣٠= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا(-٣٠) = ـ ظا٣٠ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ طريقة أخرى ظا(-٣٠)= ظا٣٣٠= ظا(٣٦٠ – ٣٠)= ـ ظا٣٠= $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$

جا(-١٥٠) = ـ جا١٥٠ = ـ جا(١٨٠ – ٣٠) = ـ جا٣٠ = $\frac{-١}{٢}$

أو جا(-١٥٠) = جا٢١٠ = جا(١٨٠+٣٠) = ـ جا٣٠ = $\frac{-١}{٢}$

جتا(-١٥٠) = جتا١٥٠ = جتا(١٨٠ – ٣٠) = ـ جتا٣٠ = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

أو جتا(-١٥٠) = جتا٢١٠ = جتا(١٨٠+٣٠) = ـ جتا٣٠ = ـ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا(-٣٠٠) = ـ جا٣٠٠ = ـ جا(٣٦٠ – ٦٠) = ـ × ـ جا٦٠ = جا٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

أو جا(-٣٠٠) = جا٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مثال بدون الحاسبة أوجد قيمة كلا من المقادير الاتية

(١) جتا١٥٠ جا٣٠٠ + جتا١٢٠ جا٢١٠ + ظا١٣٥

الحـــــــل

جتا١٥٠ = جتا(١٨٠ ـ ٣٠) = ـ جتا٣٠ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

جا٣٠٠ = جا(٣٦٠ ـ ٦٠) = ـ جا٦٠ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

جتا١٢٠ = جتا(١٨٠ ـ ٦٠) = ـ جتا٦٠ = $\frac{-١}{٢}$

جا٢١٠ = جا(١٨٠+٣٠) = ـ جا٣٠ = $\frac{-١}{٢}$

ظا١٣٥ = ظا(١٨٠ ـ ٤٥) = ـ ظا٤٥ = ـ ١

المقدار = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{-١}{٢}$ × $\frac{-١}{٢}$ + (-١) = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ ـ ١ = ١ ـ ١ = صفر

****

(٢) ٢ ظا٢٢٥° جتا١٢٠° ـ قتا(ـ ٣٠٠) جا٢٤٠

الحـــــــل

ظا٢٢٥ = ظا(١٨٠ +٤٥) = ظا٤٥ = ١

جتا١٢٠ = جتا(١٨٠ ـ ٦٠) = ـ جتا٦٠ = $\frac{-١}{٢}$

قتا (ـ ٣٠٠) = قتا٦٠ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

جا٢٤٠ = جا(١٨٠ +٦٠) = ـ جا٦٠ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

المقدار = ٢ × ١ × $\frac{-١}{٢}$ ـ $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ = ـ١ + ١ = صفر

تمارين على خواص الدوال المثلثية

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كلا من المقادير الاتية

(١) ٢ظا٢٢٥ جتا١٢٠ – قتا (- ٣٠٠) جا٢٤٠ [صفر]

(٢) جا٤٢٠ ظا٣٣٠ + جتا(- ١٢٠) قتا ٢١٠ [$\frac{١}{٢}$]

(٣) جا٨١٠ ظا (-٥٨٥) + ظتا ٦٧٥ قتا ٦٣٠ [صفر]

(٤) جتا٢١٠ جا٤٢٠ – ظا ٣١٥ + جا ٩٠ [$\frac{٥}{٤}$]

(٥) جا (- ٦٠) ظتا١٢٠ + جتا٣٠٠ جا٧٥٠ [$\frac{٣}{٤}$]

(٦) ظا٢٢٥ جتا٢٤٠ – قا (- ٣٠٠) جا٣٣٠ [$\frac{١}{٢}$]

(٧) جا٤٢٠ جتا(- ٦٩٠) + جا٢١٠ جتا٢٤٠ [١]

(٨) جتا١٥٠ جا٤٢٠ – جتا ٣٣٠ جا٣٠٠ [صفر]

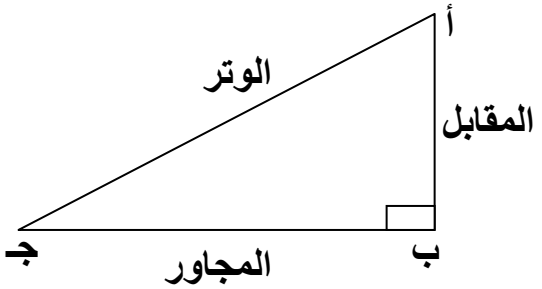
(٩) جا٩٦٠ جتا١٠٥٠ – جتا (- ٤٨٠) جا٢١٠ [-١]

(١٠) جتا٣٣٠ قا(- ١٢٠) + جا ٤٨٠ قا (- ٦٠) [صفر]

(١١) ظا ٩٠٠ قا (-٢٢٥) + جا٦٠٠ جتا(- ١٥٠) + جتا١٢٠ جا٣٣٠ [١]

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

أى زاوية حادة تقع فى مثلث قائم الزاوية يمكن إيجاد جميع الدوال المثلثية لها بمعلومية أضلاع المثلث القائم الزاوية



جاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتـر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

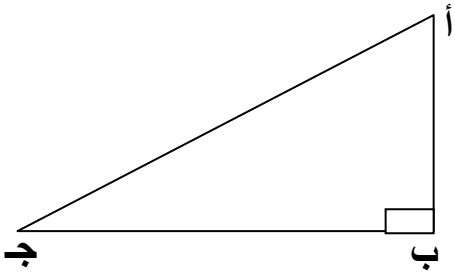
جتاجـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتـر}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

ظاجـ = $\frac{\text{المقـابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

****

لاحظ أن بالنسبة لزاوية أ يتغير وضع المقابل والمجاور فيكون المقابل (ب جـ) والمجاور (أ ب)

****



لاحظ أن :-

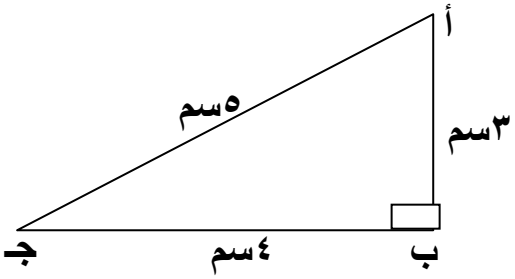
$(\text{أ جـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2$

$(\text{أ ب})^2 = (\text{أ جـ})^2 - (\text{ب جـ})^2$

$(\text{ب جـ})^2 = (\text{أ جـ})^2 - (\text{أ ب})^2$

****

مثال من المثلث القائم الزاوية المقابل أكمل



(١) جا جـ = ... (٤) قتاجـ = ...

(٢) جتاجـ = ... (٥) قاجـ = ...

(٣) ظاجـ = ... (٦) ظتاجـ = ...

****

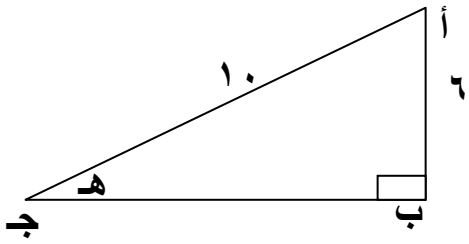
(٧) جا أ = ... (١٠) قتا أ = ...

(٨) جتا أ = ... (١١) قا أ = ...

(٩) ظا أ = ... (١٢) ظتا أ = ...

مثال إذا كان جا هـ = ٠,٦ حيث ٠° < هـ < ٩٠ أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية هـ

الحـــــــل



جاهـ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (أ ب)^{٢} = (١٠)^{٢} − (٦)^{٢}

= ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤

ب جـ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

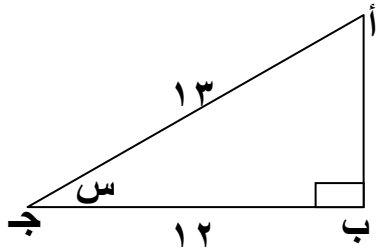
جاهـ = $\frac{٦}{١٠}$ ‖ جتاهـ = $\frac{٨}{١٠}$ ‖ ظاهـ = $\frac{٦}{٨}$

قتاهـ = $\frac{١٠}{٦}$ ‖ قاهـ = $\frac{١٠}{٨}$ ‖ ظتاهـ = $\frac{٨}{٦}$

****

مثال إذا كان جتاس = $\frac{١٢}{١٣}$ حيث ٠ < س < ٩٠° أوجد قيمة ظا س + قاس

الحـــــــل



جتاس = $\frac{١٢}{١٣}$ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (ب جـ)^{٢} = (١٣)^{٢} − (١٢)^{٢}

= ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥

أ ب = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

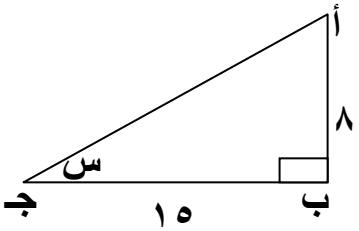
ظاس = $\frac{٥}{١٢}$ جتاس = $\frac{١٢}{١٣}$ قاس = $\frac{١٣}{١٢}$

المقدار = ظاس + قاس = $\frac{٥}{١٢}$ + $\frac{١٣}{١٢}$ = $\frac{١٨}{١٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

****

مثال إذا كان ظاس = $\frac{٨}{١٥}$ حيث ٠° < س < ٩٠° أثبت قيمة ظتاس + قتاس = ٤

الحـــــــل



ظاس = $\frac{٨}{١٥}$ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (١٥)^{٢} + (٨)^{٢} = ٢٢٥+٦٤=٢٨٩

أ جـ = $\sqrt{٢٨٩}$ = ١٧ سم

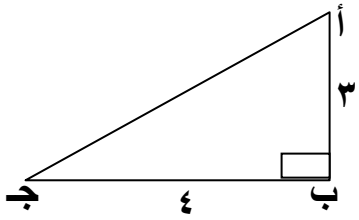
ظاس = $\frac{٨}{١٥}$ ظتاس = $\frac{١٥}{٨}$ جتا س = $\frac{٨}{١٧}$ قاس = $\frac{١٧}{٨}$

ظتاس + قتاس = + = = ٤

مثال إذا كان ظاجـ = $\frac{٣}{٤}$ حيث ٠° < جـ < ٩٠° أوجد قيمة كلا مما ياتى

(١) جا(٩٠ – جـ) (٢) جتا(٩٠ – جـ) (٣) ظا (٩٠ – جـ)

الحـــــــل



(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = ٩ +١٦ = ٢٥

أ جـ = ٥سم

جا(٩٠ – جـ) = جتاجـ = $\frac{٤}{٥}$ ،،،،،، جتا (٩٠ – جـ) = جاجـ = $\frac{٣}{٥}$

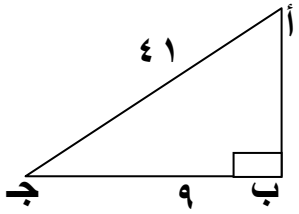
ظا(٩٠ – جـ) = ظتا جـ = $\frac{٤}{٣}$

****

مثال إذا كان قاجـ = $\frac{٤١}{٩}$ حيث ٠° < جـ < ٩٠° أوجد قيمة كلا مما ياتى

(١) جا(١٨٠ – جـ) (٢) جتا(١٨٠ – جـ) (٣) ظا (١٨٠ – جـ)

الحـــــــل



(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} - (ب جـ)^{٢} = (٤١)^{٢} – (٩)^{٢}=١٦٨١- ٨١=١٦٠٠

أ ب = ٤٠سم

جا(١٨٠ – جـ) = جاجـ = $\frac{٤٠}{٤١}$ ،،،،،، جتا (١٨٠ – جـ) = - جتاجـ = $\frac{-٩}{٤١}$

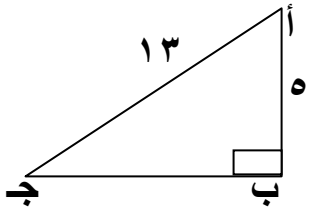
ظا(١٨٠ – جـ) = - ظا جـ = $\frac{-٤٠}{٩}$

****

مثال إذا كان جاجـ = $\frac{٥}{١٣}$ حيث ٠° < جـ < ٩٠° أوجد قيمة كلا مما ياتى

(١) جا(١٨٠ + جـ) (٢) جتا(١٨٠ + جـ) (٣) ظا (١٨٠ + جـ)

الحـــــــل



(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} - (أ ب)^{٢} = (١٣)^{٢} – (٥)^{٢} = ١٦٩ – ٢٥=١٤٤

ب جـ = ١٢سم

جا(١٨٠ + جـ) = - جاجـ = $\frac{-٥}{١٣}$ ،،،،،، جتا (١٨٠ + جـ) = - جتاجـ = $\frac{-١٢}{١٣}$

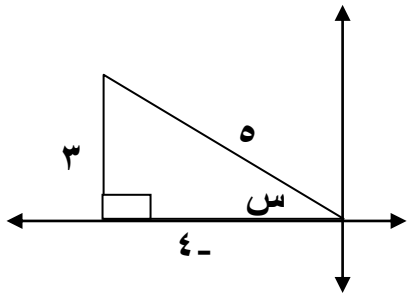
ظا(١٨٠ + جـ) = ظا جـ = $\frac{٥}{١٢}$

مثال إذا كان ٥ جا س ـ ٣ = ٠ حيث ٩٠° < س < ١٨٠ أوجد قيمة كلا مما يأتى

الحـــــــــــــل

(١) جا(١٨٠ + س) (٢) جتا(١٨٠+ س) (٣) ظا (١٨٠ + س)

الحـــــــــل



٥جاس ـ ٣ = ٠

٥جاس = ٣

جاس = $\frac{٣}{٥}$

جا(١٨٠+ س) = - جاس = $\frac{-٣}{٥}$

جتا(١٨٠ + س) = - جتاس = - × $\frac{-٤}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

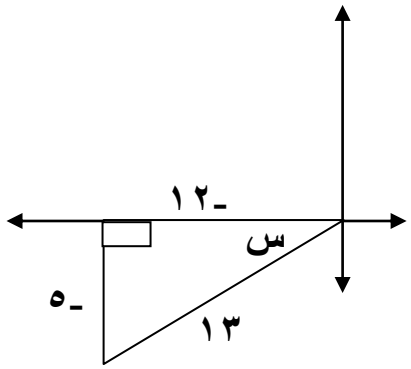
ظا(١٨٠ + س) = ظاس = $\frac{٣}{-٤}$ = $\frac{-٣}{٤}$

****

مثال إذا كان ١٢ ظا س ـ ٥ = ٠ حيث ١٨٠° < س < ٢٧٠° أوجد قيمة كلا مما يأتى

الحـــــــــــــل

(١) جا(١٨٠ - س) (٢) جتا(١٨٠- س) (٣) ظا (١٨٠ - س)



١٢ظاس ـ ٥ = ٠

١٢ظاس = ٥

ظاس = $\frac{٥}{١٢}$

جا(١٨٠- س) = جاس = $\frac{-٥}{١٣}$

جتا(١٨٠ - س) = - جتاس = - × $\frac{-١٢}{١٣}$ = $\frac{١٢}{١٣}$

ظا(١٨٠ + س) = - ظاس = - × $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{-٥}{١٢}$

تمارين على الدوال المثلثية للزاوية الحادة

(١) إذا كان ٤ ظاجـ - ٣ = ٠ حيث جـ زاوية حادة موجبة أوجد قيمة جاجـ + جتاجـ [$\frac{٧}{٥}$]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٢) إذا كان ٥ جتاهـ + ٤ = ٠ حيث ٩٠ < هـ < ١٨٠ أوجد قيمة المقدار

جتا (٣٦٠ – هـ) + جتا(٩٠ – هـ) + ظا٢٢٥ [$\frac{٤}{٥}$]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٣) إذا كان ١٣ جتاهـ - ٥ = ٠ حيث ٢٧٠ < هـ < ٣٦٠ أوجد قيمة المقدار

٥ ظا هـ - ٣ جا ٢٧٠ + قا^{٢} ٢٢٥

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٤) إذا كان جتا (٩٠ – س) = $\frac{٣}{٥}$ حيث جـ ∋] ٠ ، ٩٠° [أوجد قيمة المقدار

ظاجـ + ٢ قتا^{٢} ٢٢٥ – جتا^{٢} ٣٣٠ جا٩٠ [٤]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٥) إذا كان ٥ قتاس – ١٣ = ٠ حيث ٩٠ < س < ١٨٠ أثبت أن

١٣ جتا(١٨٠ – س) – ٥ ظتا (٣٦٠ – س) +٦ قتا٣٣٠ جتا^{٢} ٢٢٥ = - ١

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٦) إذا كان ٣ ظاس – ٤ = ٠ حيث س أكبر زاوية موجبة أوجد قيمة المقدار

٥ جتا س + ظا ١٣٥ – ٣ جتا ١٨٠ [-١]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٧) إذا كان ١٣ جتاأ – ٥ = ٠ حيث ٢٧٠ < أ < ٣٦٠ ، ٣ ظاب – ٤ = ٠ حيث ب قياس أكبر زاوية موجبة أوجد قيمة جتا(٢٧٠ + أ) × قا (٩٠ + ب) [$\frac{-١٥}{١٣}$]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

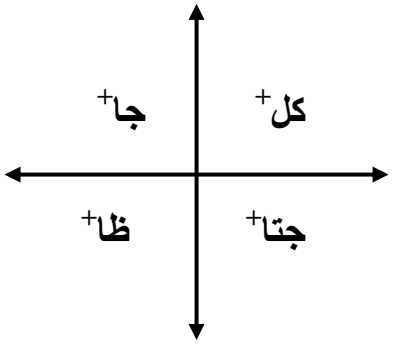
(٨) إذا كان ٥ جاس – ٤ = ٠ حيث ٩٠ < س < ١٨٠ ، ١٣ جتا ص = ١٢ حيث ٢٧٠<ص<٣٦٠

أوجد قيمة قاس جتاص + ٣ ظاس جاص

حل المعادلات المثلثية

حل المعادلات المثلثية معناه إيجاد قيمة الزاوية التى تحقق المعادلة

- خطوات حل المعادلات المثلثية



١- تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية (على حسب إشارة الدالة)

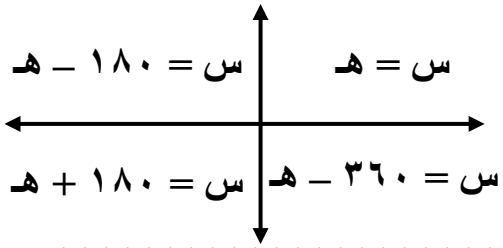
جا+ (فى الربع الاول أو الثانى) جا- (فى الربع الثالث أو الرابع)

جتا+ (فى الربع الاول أو الرابع) جتا- (فى الربع الثانى أو الثالث)

ظا+ (فى الربع الاول أو الثالث) ظا- (فى الربع الثانى أو الرابع)

٢- تحديد الزاوية الحادة التى تحقق المعادلة (هـ)

٣- أيجاد قيمة الزاوية حسب الربع الذى تقع فيه



****

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلات الاتية

(١) ٢ جاس – ١ = ٠

الحـــــل

٢جاس = ١

جاس = $\frac{١}{٢}$ [الاول – الثانى]

هـ = ٣٠°

الاول	الثانى
س=هـ	س= ١٨٠ – هـ
س=٣٠	= ١٨٠ – ٣٠
	= ١٥٠

م ٠ ح = { ٣٠° ، ١٥٠° }

(٢) ٢جاس +١ = ٠

الحـــــل

٢جاس = -١

جاس = $\frac{-١}{٢}$ [الثالث – الرابع]

هـ = ٣٠ °

الثالث	الرابع
س =١٨٠ + هـ	س=٣٦٠ – هـ
=١٨٠+ ٣٠	= ٣٦٠ - ٣٠
=٢١٠	= ٣٣٠

م ٠ ح = { ٢١٠° ، ٣٣٠ ° }

(٣) ٢ جاس – $\sqrt{٣}$ = ٠

الحـــــــل

٢جاس = $\sqrt{٣}$

جاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ [الاول – الثانى]

هـ = ٦٠°

الاول	الثانى
س=هـ	س= ١٨٠ – هـ
س=٦٠	= ١٨٠ – ٦٠
	= ١٢٠

م ٠ ح = { ٦٠° ، ١٢٠° }

(٤) ٢جاس +$\sqrt{٣}$ = ٠

الحـــــــل

٢جاس = - $\sqrt{٣}$

جاس = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ [الثالث – الرابع]

هـ = ٣٠ °

الثالث	الرابع
س = ١٨٠ + هـ	س=٣٦٠ – هـ
=١٨٠+ ٦٠	= ٣٦٠ - ٦٠
=٢٤٠	= ٣٠٠

م ٠ ح = { ٢٤٠° ، ٣٠٠ ° }

(٥) $\sqrt{٢}$ جاس – ١ = ٠

الحـــــــل

$\sqrt{٢}$جاس = ١

جاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ [الاول – الثانى]

هـ = ٤٥°

الاول	الثانى
س=هـ	س= ١٨٠ – هـ
س=٤٥	= ١٨٠ – ٤٥
	= ١٣٥

م ٠ ح = { ٤٥° ، ١٣٥° }

(٦) $\sqrt{٢}$جاس +١ = ٠

الحـــــــل

$\sqrt{٢}$جاس = -١

جاس = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ [الثالث – الرابع]

هـ = ٤٥ °

الثالث	الرابع
س = ١٨٠ + هـ	س=٣٦٠ – هـ
=١٨٠+ ٤٥	= ٣٦٠ - ٤٥
=٢٢٥	= ٣١٥

م ٠ ح = { ٢٢٥° ، ٣١٥ ° }

(٧) ٢ جتاس ـ ١ = ٠

الحـــــــل

٢جتاس = ١

جتاس = $\frac{١}{٢}$ [الاول – الرابع]

هـ = ٦٠ °

الاول	الرابع
س=هـ	س= ٣٦٠ ـ هـ
س=٦٠	= ٣٦٠ ـ ٦٠
	= ٣٠٠

م ٠ ح = { ٦٠° ، ٣٠٠° }

(٨) ٢جتاس +١ = ٠

الحـــــــل

٢جتاس = ـ١

جتاس = $\frac{-١}{٢}$ [الثانى - الثالث]

هـ = ٦٠ °

الثانى	الثالث
س = ١٨٠ ـ هـ	س=١٨٠ + هـ
=١٨٠ـ ٦٠	= ١٨٠+٦٠
=١٢٠	= ٢٤٠

م ٠ ح = { ١٢٠° ، ٢٤٠ ° }

(٩) ٢ جتاس ـ $\sqrt{٣}$ = ٠

الحـــــــل

٢جتاس = $\sqrt{٣}$

جتاس = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ [الاول – الرابع]

هـ = ٣٠°

الاول	الرابع
س=هـ	س= ٣٦٠ ـ هـ
س=٣٠	= ٣٦٠ ـ ٣
	= ٣٣٠

م ٠ ح = { ٣٠° ، ٣٣٠° }

(١٠) ٢جتاس +$\sqrt{٣}$ = ٠

الحـــــــل

٢جتاس = ـ $\sqrt{٣}$

جتاس = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ [الثانى - الثالث]

هـ = ٣٠ °

الثانى	الثالث
س = ١٨٠ ـ هـ	س=١٨٠ + هـ
=١٨٠ـ ٣٠	= ١٨٠+٣٠
=١٥٠	= ٢١٠

م ٠ ح = { ١٥٠° ، ٢١٠ ° }

(١١) $\sqrt{٢}$ جتاس ـ ١ = ٠

الحـــــــل

$\sqrt{٢}$جتاس = ١

جتاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ [الاول – الرابع]

هـ = ٤٥°

الاول	الرابع
س=هـ	س= ٣٦٠ ـ هـ
س=٤٥	= ٣٦٠ ـ ٤٥

(١٢) $\sqrt{٢}$جتاس +١ = ٠

الحـــــــل

$\sqrt{٢}$جتاس = ـ١

جتاس = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ [الثانى- الثالث]

هـ = ٤٥ °

الثانى	الثالث
س = ١٨٠ ـ هـ	س=١٨٠+ هـ
=١٨٠ـ ٤٥	= ١٨٠+٤٥

= ٣١٥

م ٠ ح = { ٤٥° ، ٣١٥° }

(١٣) $\sqrt{٣}$ ظاس – ١ = ٠

الحـــــــل

$\sqrt{٣}$ ظاس = ١

ظاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ [الاول – الثالث]

هـ = ٣٠

الاول	الثالث
س= هـ	س = ١٨٠+ هـ
س=٣٠	س=١٨٠+ ٣٠
	= ٢١٠

م ٠ ح = {٣٠ ، ٢١٠}

=١٣٥ = ٢٢٥

م ٠ ح = { ١٣٥° ، ٢٢٥° }

(١٤) $\sqrt{٣}$ ظاس +١ = ٠

الحـــــــل

$\sqrt{٣}$ظاس = -١

ظاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ [الثانى – الرابع]

هـ = ٣٠

الثانى	الرابع
س= ١٨٠ – هـ	س=٣٦٠ – هـ
س=١٨٠- ٣٠	س=٣٦٠-٣٠
= ١٥٠	= ٣٣٠

م ٠ ح = {١٥٠ ، ٣٣٠}

(١٥) ظاس – $\sqrt{٣}$ = ٠

الحـــــــل

ظاس = $\sqrt{٣}$ [الاول – الثالث]

هـ =٦٠

الاول	الثالث
س= هـ	س = ١٨٠+ هـ
س=٦٠	س=١٨٠+ ٦٠
	= ٢٤٠°

م ٠ ح = {٦٠° ، ٢٤٠°}

(١٦) ظاس +$\sqrt{٣}$ = ٠

الحـــــــل

ظاس = - $\sqrt{٣}$ [الثانى – الرابع]

هـ = ٦٠

الثانى	الرابع
س= ١٨٠ – هـ	س=٣٦٠ – هـ
س=١٨٠- ٦٠	س=٣٦٠- ٦٠
= ١٢٠°	= ٣٠٠°

م ٠ ح = {١٢٠° ، ٣٠٠°}

(١٧) ظاس – ١ = ٠

الحـــــــل

ظاس = ١ [الاول – الثالث]

هـ = ٤٥

الاول	الثالث
س= هـ	س = ١٨٠+ هـ
س= ٤٥	س=١٨٠+ ٤٥

(١٨) ظاس +١ = ٠

الحـــــــل

ظاس = ١ [الثانى – الرابع]

هـ = ٤٥

الثانى	الرابع
س= ١٨٠ – هـ	س=٣٦٠ – هـ
س=١٨٠- ٤٥	س=٣٦٠- ٤٥

= ٢٢٥

م ٠ ح = {٤٥° ، ٢٢٥ °}

(١٩) جاس = ٠,٦٤٤٨

الحـــــــل

جاس = ٠,٦٤٤٨ [الاول – الثانى]

هـ = ٩ ′ ٤٠ °

الاول	الثانى
س= هـ	س = ١٨٠ – هـ
=٩ ′ ٤٠ ° ′ ٧٥ °	= ١٨٠ – ٩ ′ ٤٠ °

= ٥١ ′ ١٣٩ °

م ٠ ح = {٩ ′ ٤٠° ، ٥١ ′ ١٣٩ °}

= ١٣٥ = ٣١٥ °

م ٠ ح = {١٣٥° ، ٣١٥ °}

(٢٠) جتاس = ٠,٢٥٣٧

الحـــــــل

جتاس = ٠,٢٥٣٧ [الاول – الرابع]

هـ = ١٨ ′ ٧٥ °

الاول	الرابع
س = هـ	س = ٣٦٠ – هـ
= ١٨ ′ ٧٥ °	=٣٦٠ – ١٨

= ٤٢ ′ ٢٨٤ °

م ٠ ح = { ١٨ ′ ٧٥ ° ، ٤٢ ′ ٢٨٤ °}

(١٩) جاس =- ٠,٦٤٤٨

الحـــــــل

جاس = - ٠,٦٤٤٨ [الثالث – الرابع]

هـ = ٩ ′ ٤٠ °

الثالث	الرابع
س=١٨٠+ هـ	س = ٣٦٠ – هـ
=١٨٠+٩ ′ ٤٠ ° ٧٥ °	= ٣٦٠ – ٩ ′ ٤٠ °

=٩ ′ ٢٢٠ ° ٢٥٥ ° = ٥١ ′ ٣٣٩ °

م ٠ ح = {٩ ′ ٢٢٠° ، ٥١ ′ ٣٣٩°}

(٢٠) جتاس =- ٠,٢٥٣٧

الحـــــــل

جتاس = - ٠,٢٥٣٧ [الثانى – الثالث]

هـ = ١٨ ′ ٧٥ °

الثانى	الثالث
س =١٨٠ - هـ	س = ١٨٠ + هـ
=١٨٠- ١٨ ′ ٧٥ °	=١٨٠ + ١٨ ′

=٤٢ ′ ١٠٤ ° = ١٨ ′

م ٠ ح = { ٤٢ ′ ١٠٤ ° ، ١٨ ′ ٢٥٥ °}

تمارين على الهندسة

تمارين على التقسيم

أولا التقسيم من الداخل

(١) إذا كانت أ=(-١ ، ٢) ، ب = (٦ ، ٩) أوجد أحداثيات النقطة التى تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٣ : ٤ (٢ ، ٥)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٢) إذا كانت أ=(-٣ ، ٢) ، ب = (٤ ، -٥) أوجد أحداثيات النقطة التى تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٥ : ٢ (٢ ، ٧)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٣) إذا كانت أ=(-١ ، ٠) ، ب = (٤ ، ٥) أوجد أحداثيات النقطة التى تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٣ : ٢ (٢ ، ٣)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٤) إذا كانت أ=(-١ ، -٣) ، ب = (٨ ، ٦) أوجد أحداثيات النقطة التى تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٥ : ٤ (٤ ، ٢)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٥) إذا كانت أ=(-٣ ، ٢) ، ب = (٦ ، ١١) أوجد أحداثيات النقطة التى تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٧ : ٢ (٤ ، ٩)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٦) إذا كانت أ=(-٥ ، ١) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد أحداثيات النقطة التى تقع عند ربع المسافة من أ إلى ب (-٣ ، ٢)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٧) إذا كانت أ=(-١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ١٢) أوجد أحداثيات النقطة التى تقع عند خمس المسافة من أ إلى ب (٠ ، ٤)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٨) إذا كانت أ=(-٢ ، ٣) ، ب = (١ ، ٩) أوجد أحداثيات النقطة التى تقع عند ثلث المسافة من أ إلى ب (-١ ، ٥)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٩) إذا كانت أ=(-١ ، ١) ، ب = (٢ ، ٤) أوجد أحداثيات النقط التى تقسم أ ب من الداخل إلى ثلاث أجزاء متساوية [(٠ ، ٢) ، (١ ، ٣)]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٠) إذا كانت أ=(١ ، -٤) ، ب = (٧ ، ٢) أوجد أحداثيات النقط التى تقسم أ ب من الداخل إلى ثلاث أجزاء متساوية [(٣ ، -٢) ، (٥ ، ٠)]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١١) إذا كانت أ = (-٣ ، ١) ، ب = (٣ ، ٤) أوجد أحداثيات النقط التى تقسم أ ب من الداخل إلى ثلاث أجزاء متساوية [(-١ ، ٢) ، (١ ، ٣)]

(١٢) إذا كانت أ=(-٥ ، ١) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد منتصف أ ب (-١ ، ٣)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٣) إذا كانت أ=(-٥ ، ٧) ، ب = (-١ ، ٣) أوجد منتصف أ ب (-٣ ، ٥)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٤) إذا كانت أ=(-١ ، ١) ، ب = (٣ ، ٧) أوجد منتصف أ ب (١ ، ٤)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٥) إذا كانت أ=(-٥ ، ١) ، جـ = (٣ ، ٥) فإذا كانت جـ منتصف أ ب أوجد أحداثيات ب (١١ ، ٩)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٦) إذا كانت أ=(-١ ، ١) ، جـ = (٣ ، ٢) فإذا كانت جـ منتصف أ ب أوجد أحداثيات ب (٧ ، ٣)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٧) إذا كانت ب=(٢ ، ١) ، جـ = (٣ ، ٥) فإذا كانت جـ منتصف أ ب أوجد أحداثيات أ (٤ ، ٩)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٨) إذا كانت ب =(٥ ، ٢) ، جـ = (٣ ، ٠) فإذا كانت جـ منتصف أ ب أوجد أحداثيات أ (١ ، -٢)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٩) إذا كانت أ = (س ، ١) ، ب = (-٢ ، ص) ، جـ = (٣ ، ٤) فإذا كانت جـ منتصف أ ب أوجد قيمتى س ، ص [س =٨ ، ص =٧]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٢٠) إذا كانت أ = (س ، -٣) ، ب = (٢ ، ص) ، جـ = (١ ، ٤) فإذا كانت جـ منتصف أ ب أوجد قيمتى س ، ص [س = ٠ ، ص = ١١]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٢١) إذا كانت أ = (س ، -١) ، ب = (-٢ ، ص) ، جـ = (٣ ، ٥) فإذا كانت جـ منتصف أ ب أوجد قيمتى س ، ص [س = ٨ ، ص = ١١]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٢٢) إذا كانت أ=(-١ ، ٢)، ب=(٤ ، ٦)، جـ=(٣ ، ١) أوجد أحداثيات نقطة تلاقى متوسطات △أ ب جـ (٢ ، ٣)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٢٣) إذا كانت أ=(-٤ ، ٢)، ب=(١ ، ٦)، جـ=(٠ ، ٧) أوجد أحداثيات نقطة تلاقى متوسطات △أ ب جـ (-١ ، ٥)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
(٢٤) إذا كانت أ=(٠ ، ١)، ب=(٤ ، ٥)، جـ=(-١ ، ٦) أوجد أحداثيات نقطة تلاقى متوسطات △أ ب جـ (١ ، ٤)
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
(٢٥) إذا كانت أ=(٠ ، ١)، ب=(٤ ، ٥)،م =(-٢ ، ٣) وكانت م هى نقطة تلاقى متوسطات △أ ب جـ أوجد أحداثيات جـ (-١٠، ٣)

(٢٦) إذا كانت ب =(٥ ، ١)، جـ =(-٣ ، ٢)،م =(-٢ ، ١) وكانت م هى نقطة تلاقى متوسطات △أ ب جـ أوجد أحداثيات أ (-٨ ، ٠)
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
(٢٧) إذا كانت أ=(٠ ، ١)، جـ =(٤ ، ٥)،م =(٠، ٢) وكانت م هى نقطة تلاقى متوسطات △أ ب جـ أوجد أحداثيات ب (-٤ ، ٠)
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
(٢٨) إذا كانت أ=(س ، ٢)، ب=(٤ ، ص) ، جـ = (٣ ، ١) ، م = (٢ ، ٣)
وكانت م هى نقطة تلاقى متوسطات △أ ب جـ أوجد قيمتى س ، ص [س=-١ ، ص=٦]
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
(٢٩) إذا كانت أ=(٠ ، ١)، ب=(س ، ٥) ، جـ = (-١ ، ص) ، م = (١ ، ٤)
وكانت م هى نقطة تلاقى متوسطات △أ ب جـ أوجد قيمتى س ، ص [س=٤ ، ص=٦]
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
(٣٠) إذا كانت أ=(-٤ ، ص)، ب=(١ ، ٦) ، جـ = (س ، ٧) ، م = (-١ ، ٥)
وكانت م هى نقطة تلاقى متوسطات △أ ب جـ أوجد قيمتى س ، ص [س=٠ ، ص= ٢]
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

للمتفوقين

(١) إذا كانت أ=(-١ ، ٤) ، جـ = (٣ ، ٨) فإذا كانت جـ تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٤ : ٣ أوجد أحداثيات ب (٦ ، ١١)
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
(٢) إذا كانت ب = (٥ ، ٨) ، جـ = (٣ ، ٦) فإذا كانت جـ تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٣ : ٢ أوجد أحداثيات أ (٠ ، ٣)
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
(٣) إذا كانت أ=(س ، ٢) ، ب = (٤ ، ص) ، جـ = (٢ ، ٥) وكانت جـ تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٣ : ٢ أوجد قيمتى س ، ص [س = -١ ، ص = ٧]
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
(٤) إذا كانت أ = (-٢ ، ص) ، ب = (س ، ٨) ، جـ = (٢ ، ٥) وكانت جـ تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٤ : ٣ أوجد قيمتى س ، ص [س = ٥ ، ص = ١]
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
(٥) إذا كانت أ=(س، -٣) ، ب = (١٠ ، ٦) ، جـ = (٦ ، ص) فإذا كانت جـ تقسم أ ب من الداخل

بنسبة ٥ : ٤ أوجد قيمتى س ، ص [س= ١ ، ص = ٢]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٦) إذا كانت أ = (-٣، ٢) ، ب = (٤ ، ص) ، جـ = (س ، ٧) فإذا كانت جـ تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٥ : ٢ أوجد قيمتى س ، ص [س = ٢ ، ص = ٩]

التقسيم من الخارج :-

(١) إذا كانت أ = (١ ، ٤) ، ب = (٦ ، ٩) أوجد أحداثيات النقطة التى تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٧ : ٢ (٨ ، ١١)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٢) إذا كانت أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٦) أوجد أحداثيات النقطة التى تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٩ : ٥ (٨ ، ١١)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٣) إذا كانت أ = (-٢ ، ٣) ، ب = (١ ، ٦) أوجد أحداثيات النقطة التى تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٥ : ٢ (٣ ، ٨)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٤) إذا كانت أ = (١ ، ٣) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد أحداثيات النقطة التى تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٧ : ٥ (٨ ، ١٠)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٥) إذا كانت أ = (١ ، -٤) ، ب = (٥ ، ٠) أوجد أحداثيات النقطة التى تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٧ : ٣ (٨ ، ٣)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٦) إذا كانت أ = (-٤ ، ١) ، جـ = (٣ ، ٨) وكانت جـ تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٧ : ٥ أوجد أحداثيات ب (-٢ ، ٣)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٧) إذا كانت ب = (-٢ ، ١) ، جـ = (٣ ، ٦) وكانت جـ تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٧ : ٥ أوجد أحداثيات أ (-٤ ، -١)

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٨) إذا كانت أ = (-١ ، ص) ، ب = (س ، ٥) ، جـ = (٦ ، ٨) وكانت جـ تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٧ : ٣ أوجد قيمتى س ، ص [س = ٣ ، ص = ١]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٩) إذا كانت أ = (س ، ٢) ، ب = (٣ ، ص) ، جـ = (٦ ، ٧) وكانت جـ تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٥ : ٣ أوجد قيمتى س ، ص [س = ١ ، ص = ٤]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٠) إذا كانت أ = (-١ ، ٢) ، ب = (س ، ٤) ، جـ = (٦ ، ص) وكانت جـ تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٧ : ٥ أوجد قيمتى س ، ص [س = ١ ، ص = ٩]

مسائل عامة على التقسيم:-

(١) إذا كانت أ = (-١ ، ٠) ، ب = (٤ ، ٥) أوجد أحداثيات النقطة جـ حيث
١) جـ ∈ أب حيث ٣ أجـ = ٢ جـ ب (١ ، ٢)
٢) جـ ∉ أ ب ، جـ ∈ أب حيث ٢أ جـ = ٧ جـ ب (٦ ، ٧)

@@

(٢) إذا كانت أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٦) أوجد أحداثيات النقطة جـ حيث
١) جـ ∈ أب حيث ٣ أجـ = جـ ب (٠ ، ٣)
٢) جـ ∉ أ ب ، جـ ∈ أب حيث ٣أ جـ = ٧ جـ ب (٦ ، ٩)

@@

(٣) إذا كانت أ = (-٣ ، ١) ، ب = (٤ ، ٨) أوجد أحداثيات النقطة جـ حيث
١) جـ ∈ أب حيث ٣ أب = ٧ جـ ب (١ ، ٥)
٢) جـ ∉ أ ب ، جـ ∈ أب حيث ٢أ جـ = ٩ جـ ب (٦ ، ١٠)

@@

(٤) إذا كانت أ = (-١ ، -٣) ، ب = (٨ ، ٦) أوجد أحداثيات النقطة جـ حيث
١) جـ ∈ أب حيث ٤ أجـ = ٩ جـ ب (٤ ، ٢)
٢) جـ ∉ أ ب ، جـ ∈ أب حيث ٢أ جـ = ١١ جـ ب (١٠ ، ١٢)

@@

(٥) إذا كانت أ = (١ ، -٣) ، ب = (٦ ، ٢) أوجد أحداثيات النقطة جـ حيث
١) جـ ∈ أب حيث ٣ ب جـ = ٢ أ جـ (٤ ، ٠)
٢) جـ ∉ أ ب ، جـ ∈ أب حيث ٢أ ب = ٥ جـ ب (٨ ، ٤)

@@

(٦) إذا كانت أ = (-١ ، ٣) ، ب = (٤ ، ٨) ، جـ = (١ ، ٥) أوجد
١- النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة أ ب مبينا نوع التقسيم [٢ : ٣ من الداخل]
٢- النسبة التى تقسم بها ب القطعة المستقيمة أ جـ مبينا نوع التقسيم [٥ : ٣ من الخارج]
٣- النسبة التى تقسم بها أ القطعة المستقيمة ب جـ مبينا نوع التقسيم [٥ : ٢ من الخارج]

@@

(٧) إذا كانت أ = (-٣ ، -١) ، ب = (٤ ، ٦) ، جـ = (٢ ، ٤) أوجد
١- النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة أ ب مبينا نوع التقسيم [٥ : ٢ من الداخل]
٢- النسبة التى تقسم بها ب القطعة المستقيمة أ جـ مبينا نوع التقسيم [٧ : ٢ من الخارج]
٣- النسبة التى تقسم بها أ القطعة المستقيمة ب جـ مبينا نوع التقسيم [٧ : ٥ من الخارج]

@@

(٨) إذا كانت أ=(-١ ، ٣) ، ب =(٦ ، ص) ، جـ = (٢ ، ٦) أوجد النسبة التى تقسم بها جـ القطعة

المستقيمة أ ب مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة ص [٣ : ٤ من الداخل ، ص = ١٠]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(٩) إذا كانت أ=(س ، ٣) ، ب =(٦ ، ٨) ، جـ = (٤ ، ٦) أوجد النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة أ ب مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة س [٣ : ٢ من الداخل ،، س=١]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٠) إذا كانت أ=(-٣ ، ١) ، ب =(٦ ، ١٠) ، جـ = (س ، ٥) أوجد النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة أ ب مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة س [٤ : ٥ من الداخل ، س = ١]

(١١) إذا كانت أ=(-١ ، ١) ، ب =(٣ ، ٥) ، جـ = (٦ ، ص) أوجد النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة أ ب مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة ص [٧ : ٣ من الخارج ، ص = ٨]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٢) إذا كانت أ=(١ ، ٢) ، ب =(س، ٤) ، جـ = (٨ ، ٩) أوجد النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة أ ب مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة س [٧ : ٥ من الخارج ، س = ٣]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٣) إذا كانت أ=(-٣ ، ٥) ، ب = (٤ ، ٦) أوجد النسبة التى تنقسم بها القطعة المستقيمة أ ب بواسطة

١- محور السينات [٥: ٦ من الخارج] ٢- محور الصادات [٣ : ٤ من الداخل]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٤) إذا كانت أ=(٤ ، ٥) ، ب = (٧ ، -٣) أوجد النسبة التى تنقسم بها القطعة المستقيمة أ ب بواسطة

١- محور السينات [٥: ٣ من الداخل] ٢- محور الصادات [٤ : ٧ من الخارج]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٥) إذا كانت أ=(-٣ ، ٥) ، ب = (٧ ، -٤) أوجد النسبة التى تنقسم بها القطعة المستقيمة أ ب بواسطة

١- محور السينات [٥: ٤ من الداخل] ٢- محور الصادات [٣ : ٧ من الداخل]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٦) إذا كانت أ=(٣ ، ٥) ، ب = (٤ ، ٧) أوجد النسبة التى تنقسم بها القطعة المستقيمة أ ب بواسطة

١- محور السينات [٥: ٧ من الخارج] ٢- محور الصادات [٣ : ٤ من الخارج]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

تمارين على معادلة الخط المستقيم

أولا : معادلة مستقيم بمعلومية نقطة يمر بها وميله :-

(١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) وميله = $\frac{٤}{٥}$ [٥س – ٤ ص – ٦ = ٠]

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٢) وميله = $\frac{-٥}{٧}$ [٧ص +٥س-٢٩=٠]

(٣) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، -٣) وميله = $\frac{٥}{٤}$ [٤ص – ٥ س +١٧ = ٠]

(٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١ ، ٥) وميله = $\frac{-٤}{٣}$ [٣ص +٤ س – ١١ = ٠]

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٢ ، -٣) وميله = $\frac{٤}{٧}$ [٧ص – ٤ س +١٣ = ٠]

(٦) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل وميله = $\frac{٣}{٧}$ [٧ ص – ٣ س = ٠]

(٧) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٢) وميله = $\frac{٧}{٥}$ [٥ص – ٧ س – ١٠ = ٠]

(٨) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٠) وميله = $\frac{-٥}{٩}$ [٩ص +٥س – ١٥ = ٠]

(٩) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) وميله = ٤ [ص – ٤ س +٢ = ٠]

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، -١) وميله = ٥ [ص – ٥ س +١٦ = ٠]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

ثانيا معادلة مستقيم بمعلومية نقطتين :-

(١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٥) [٢ص – ٣ س – ١ = ٠]

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٣) ، (٤ ، ٩) [٥ص – ٦ س – ٢١ = ٠]

(٣) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -٣) ، (٥ ، -١) [٣ص – ٢ س +١٣=٠]

(٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٣ ، ٠) [٣ص+٤س – ١٢ = ٠]

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، -٢) ، (٤ ، ٧) [٥ص – ٩ س +١ = ٠]

(٦) إذا كانت أ = (٤ ، ١) ، ب = (٢ ، ٦) أوجد معادلة أ ب [٢ص+٥س – ٢٢ = ٠]

(٧) إذا كانت س = (٢ ، -١) ، ص = (٤ ، -٨) أوجد معادلة س ص [٢ص+٧س – ١٢ = ٠]

(٨) إذا كانت جـ = (٠ ، ٤) ، ء = (-٣ ، ٩) أوجد معادلة جـ ء [٣ص +٥س – ١٢ = ٠

معادلة مستقيم بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات :-

(١) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = ٤ ويقطع خمس وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات

[ص =٤س+٥]

(٢) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله =٢ ويقطع ثلاث وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات

[ص = ٢س – ٣]

(٣) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = -٣ ويقطع وحدتان من الجزء الموجب لمحور الصادات

[ص= -٣س +٢]

(٤) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = $\frac{٥}{٣}$ ويقطع أربعة وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات

[ص = $\frac{٥}{٣}$ س +٤]

(٥) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = $\frac{-٤}{٧}$ ويقطع ثلاث وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات

[ص = $\frac{-٤}{٧}$ س – ٣]

(٦) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = ٣ ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٤)

[ص = ٣س+٤]

(٧) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = ٥ ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، -٢)

[ص = ٥س – ٢]

(٨) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = -٤ ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٥)

[ص = ٥ – ٤ س]

(٩) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = -٦ ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، -٥)

[ص=-٦س – ٥]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

(١٠) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات فى كلا من المستقيمات الاتية

أ) ص = ٣ س + ٧ (ب) ص = ٥ – ٣س

(جـ) ٣ص = ٤س +٦ (ء) ٥ص = ١٠ – ٦ س

(هـ) ص – ٢س +٥ = ٠ (و) ٤ص – ٣س – ٥ = ٠

(ر) ص – ٣س = ٥ (ز) ص + ٧ = ٥س

(س) ٢ص = $\frac{١}{٣}$ س +٥ (ش) $\frac{١}{٣}$ ص = ٢س + ٤

رابعا معادلة مستقيم بمعلومية الجزئين المقطوعين من محورى الاحداثيات :-

(١) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع وحدتان من الجزء الموجب لمحور السينات وخمس وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات [٥س +٢ص = ١٠]

(٢) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع وحدتان من الجزء الموجب لمحور السينات وثلاث وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات [٣س – ٢ ص = ٦]

(٣) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع أربعة وحدات من الجزء السالب لمحور السينات وخمس وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات [٤ ص – ٥ س = ٢٠]

(٤) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع وحدتان من الجزء السالب لمحور السينات وخمس وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات [٥ س +٢ص = - ١٠]

(٥) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع ثلاث وحدات من الجزء الموجب لمحور السينات وخمس وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات [٥س – ٣ ص = ١٥]

(٦) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (٣ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٤) [٤س +٣ص = ١٢]

(٧) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (٥ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، -٣) [٣س – ٥ ص = ١٥]

(٨) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (-٤ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٥) [٥س – ٤ ص +٢٠ = ٠]

(٩) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (-٢ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، -٥) [٥س +٢ ص +١٠ =٠]

@@

[١٠] أوجد المقطوعتين السينية والصادية لكلا من المستقيمات الاتية

١) ٢س +٣ ص = ٦ (٢) ٣س +٥ ص – ١٥ = ٠

٣) ٥س +٢ص +١٠ = ٠ (٤) ٣س – ٤ ص = ١٢

٥) ٣ص – ٦س = ١٨ (٦) ٢س +٣ص = ٨

(٧) ٣س +٥ ص = ١٠ (٨) ٥س + ٧ ص = ٤

(٩) ٣س – ٥ص = ٧ (١٠) ٥س +٢ص = ٧

تمارين على معادلة مستقيم بمعلومية نقطة يمر بها وميل المستقيم الموازى له

(١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) والموازى للمستقيم الذى ميله = $\frac{٥}{٣}$

[٣ص – ٥ س – ١ = ٠]

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، -٣) والموازى للمستقيم الذى ميله = $\frac{٤}{٧}$

[٧ص – ٤ س +٢٥ =٠]

(٣) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٤ ، ٢) والموازى للمستقيم الذى ميله = $\frac{-٥}{٣}$

[٣ص +٥س +١٤ =٠]

(٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١) والموازى للمستقيم الذى معادلته

٣ص = ٥س + ١ [٣ص – ٥س +١٣=٠]

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٤ ، ١) والموازى للمستقيم الذى معادلته

٣ص = ٤ – ٢س [٣ص+٢س +٥= ٠]

(٦) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٠) والموازى للمستقيم الذى معادلته

٧ص - ٥س + ١ = ٠ [٧ ص – ٥س +١٠ =٠]

(٧) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، -١) والموازى للمستقيم الذى معادلته

٤ص + ٥س + ٢ =٠ [٥ص +٤س +٥=٠]

(٨) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٣ ، -١) والموازى للمستقيم الذى معادلته

ص = ٥س + ١ [ص – ٥ س – ١٤= ٠]

(٩) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والموازى للمستقيم الذى معادلته

٣ص = ٧س + ٢ [٣ص – ٧ س = ٠]

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -٣) والموازى للمستقيم المار بالنقطتين

(١ ، ٣) ، (٥ ، ٠) [٤ص +٣س +٦ = ٠]

(١١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -٤) والموازى للمستقيم المار بالنقطتين

(١ ، ٣) ، (٥ ، -٢) [٤ص +٥س +٦ = ٠]

(١٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٤) والموازى للمستقيم المار بالنقطتين

(-١ ، ٣) ، (٥ ، ٨) [٦ص – ٥س – ٢٤ = ٠]

(١٣) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) والموازى لمحور السينات [ص = ٤]

(١٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، -٥) والموازى لمحور السينات [ص = -٥]

(١٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) والموازى لمحور الصادات [س = ٣]

(١٦) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٦ ، ٤) والموازى لمحور الصادات [س = -٦]

(١٧) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويصنع زاوية ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات [ص – س – ١ = ٠]

(١٨) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٥ ، ٣) ويصنع زاوية ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات [ص + س +٢ = ٠]

(١٩) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -٤) ويصنع زاوية ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات [ص - √٣ س +٤ – ٢ √٣ = ٠]

(٢٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويصنع زاوية $\frac{ط}{٦}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات [√٣ ص – س +٢ – ٣ √٣ = ٠]

@@@

المستقيم ٣س +٤ ص = ١ [٤ص +٣س +٤ = ٠]

(٥) إذا كانت أ = (-١ ، ٥) ، ب = (٤ ، ١) ، جـ = (٢ ، ٥) رؤوس مثلث أ ب جـ أوجد معادلة المتوسط أ ء [٢ ص + س – ٩ = ٠]

(٦) إذا كانت أ = (-١ ، ٥) ، ب = (٤ ، ١) ، جـ = (٣ ، ٧) رؤوس مثلث أ ب جـ أوجد معادلة المتوسط ب هـ [٣ ص – ٥ س +١٧ = ٠]

تمارين على معادلة مستقيم بمعلومية نقطة يمر بها وميل المستقيم الموازى له

(١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) والعمودى على المستقيم الذى ميله = $\frac{٥}{٣}$

[٥ص +٣س – ١٣=٠]

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، -٣) والعمودى على المستقيم الذى ميله = $\frac{٤}{٧}$

[٤ص +٧س+٥=٠]

(٣) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٤ ، ٢) والعمودى على المستقيم الذى ميله = $\frac{-٥}{٣}$

[٥ص – ٣س – ٢٢=٠]

(٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١) والعمودى على المستقيم الذى معادلته

٣ص = ٥س + ١ [٥ص+٣س – ١ =٠]

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٤ ،١) والعمودى على المستقيم الذى معادلته

٣ص = ٤ – ٢س [٢ص – ٣ س – ١٤ = ٠]

(٦) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٠) والعمودى على المستقيم الذى معادلته

٧ص - ٥س + ١ = ٠ [٥ص + ٧س – ١٤ = ٠]

(٧) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، -١) والعمودى على المستقيم الذى معادلته

٤ص + ٥س + ٢ =٠ [٥ص – ٤ س +٥ = ٠]

(٨) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٣ ، -١) والعمودى على المستقيم الذى معادلته

ص = ٥س + ١ [٥ص + س +٨ = ٠]

(٩) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والعمودى على المستقيم الذى معادلته

٣ص = ٧س + ٢ [٧ص +٣س = ٠]

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -٣) والعمودى على المستقيم المار بالنقطتين

(١ ، ٣) ، (٥ ، ٠) [٣ص – ٤ س +١٧ = ٠]

(١١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -٤) والعمودى على المستقيم المار بالنقطتين

(١ ، ٣) ، (٥ ، -٢) [٥ ص – ٤ س +٢٨ = ٠]

(١٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٤) والعمودى على المستقيم المار بالنقطتين

(-١ ، ٣) ، (٥ ، ٨) [٥ ص +٦س – ٢٠ = ٠]

(١٣) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم أ ب على التعامد عند أ حيث

أ = (-١ ، ٤) ، ب = (٢ ، ٠) [٤ص – ٣س – ١٩ = ٠]

(١٤) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم ٢س + ص = ٥ على التعامد عندما س=٣

[٢ص – س +٥ = ٠]

(١٥) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم ٣س +٢ص = ٧ على التعامد عندما ص=٥

[٣ص – ٢ س – ١٧ = ٠]

(١٦) إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٦) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع أ ب على التعامد من منتصفه [ص + س – ٦ = ٠]

(١٧) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم ٢س +٣ص =٦ على التعامد عند نقطة تقاطعه مع محور السينات [٢ص – ٣ س +٩ = ٠]

(١٨) أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم ٢س +٣ص =٦ على التعامد عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات [٢ص – ٣ س – ٤ = ٠]

(١٩) إذا كان أ = (١ ، ٥) ، ب = (٤ ، ١) ، جـ = (-٣ ، ٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ عمودى على ب جـ [ص – ٧ س +٢ = ٠]

(٢٠) إذا كان أ = (١ ، ٥) ، ب = (٤ ، ١) ، جـ = (-٣ ، ٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة ب عمودى على أ جـ [٥ص +٤س – ٢١ = ٠]

(٢١) إذا كان أ = (١ ، ٥) ، ب = (٤ ، ١) ، جـ = (-٣ ، ٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة جـ عمودى على أ ب [٤ص – ٣س – ٩ = ٠]

(٢٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٣ ، ٢) والعمودى على محور السينات

[س = -٣]

(٢٣) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٣ ، ٢) والعمودى على محور الصادات

[ص = ٢]

(٢٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٣ ، ٤) والعمودى على المستقيم ص = ٥

[س = -٣]

(٢٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٣ ، ٢) والعمودى على المستقيم س = ٤

[ص =٢]

(٢٦) أوجد معادلة محور تماثل أ ب حيث أ = (٢ ، ٣) ، ب = (-٤ ، ٥)

[ص – ٣س – ٧ = ٠]

(٢٧) إذا كان أ ب قطر فى دائرة مركزها م فإذا كان أ = (١ ، ١) ، ب = (٣ ، -٢) أوجد معادلة المماس للدائرة عند نقطة أ [٣ص – ٢ س – ١ = ٠]

(٢٨) إذا كان أ ب جـ ء مربع فيه أ = (٣ ، ٢) ، جـ = (-١ ، ٤) أوجد معادلتى قطريه

[٢ص+س – ٧ = ٠، ص – ٢ س – ١ = ٠]

(٢٩) إذا كان ميل المستقيم (٣أ+١) س – ٢ أ ص +٣ = ٠ يساوى ٢ فأوجد قيمة أ [١]

(٣٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ [٤ص – ٣س – ٥ = ٠]

(٣١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية جيبها $\frac{٤}{٥}$ [٣ص – ٤ س – ٢ = ٠]

(٣٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية جيب تمامها $\frac{٨}{١٧}$ [٨ص – ١٥ س – ١ = ٠]

الزاوية بين مستقيمين

(١) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

س – ٢ ص +٥ = ٠ ، ٢س+٤ص – ٧= ٠ [٨ / ٥٣ ْ ، ٥٢ / ١٢٦ ْ

]

@@@

@@@

أوجد قيمة ك [، ٤]

@@@

@@@

أوجد قيمة أ [٣]

@@@

١- طول ب جـ [٥] ٢- معادلة المستقيم ب جـ [٣س+٤ص-٣=٠]

٣- طول العمود المرسوم من أ على ب جـ [٤] ٤- مساحة△ أ ب جـ [١٠ وحدة مربعة]

@@@