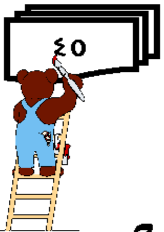


# تحديد نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية دون حلها

## المميز

إذا كان جذرى المعادلة أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح

هما : $\dfrac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ ، $\dfrac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ وكلا الجذرين

يحتويان على المقدار $\sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}$ يسمى المقدار ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ مميز المعادلة

التربيعية ويستخدم لتحديد نوع جذرى المعادلة .

**فى أى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد على صورة**

أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = ٠

❶ إذا كان المميز للمعادلة ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = صفر كان للمعادلة جذران حقيقيان متساويان وكل منهما = $\dfrac{-ب}{٢ أ}$

❷ إذا كان المميز للمعادلة ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ > صفر كان للمعادلة جذران حقيقيان مختلفين

❸ إذا كان المميز للمعادلة ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ < صفر فان ليس للمعادلة أى جذور حقيقية ( غير حقيقيين ) ( مركبين )

## مثال [١]

حدد نوع جذرى المعادلات التالية :

❶ ٥س$^{٢}$ + س − ٧ = ٠    ❷ س$^{٢}$ − ٢س + ١ = ٠

❸ ٥س − ٣٠ − س$^{٢}$ = ٠

## الحل

❶ ٥س$^{٢}$ + س − ٧ = ٠

∵ أ = ٥ ، ب = ١ ، جـ = − ٧

المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = ١ − ٤ × ٥ × (− ٧) = ١٤١

∵ المميز عدد موجب    ∴ يوجد جذران حقيقيان مختلفان .

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

❷ س$^{٢}$ − ٢س + ١ = ٠

∵ أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ١

المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = (−٢)$^{٢}$ − ٤ × ١ × (١) = ٤ − ٤ = ٠

∵ المميز يساوى صفر          ∴ يوجد جذران حقيقيان متساويان

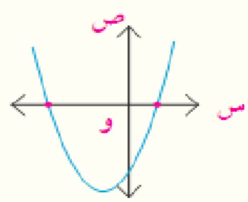
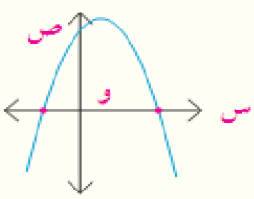
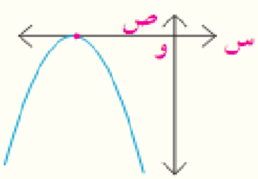
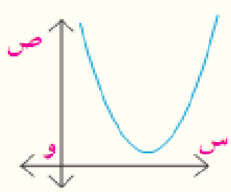
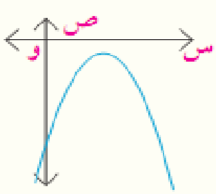
❸ ٥س − ٣٠ − س$^{٢}$ = ٠

∵ أ = −١ ، ب = ٥ ، جـ = −٣٠

المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = (٥)$^{٢}$ − ٤ × (−١) × (−٣٠) = ٢٥ − ١٢٠ = −٩٥

∵ المميز يساوى عدد سالب          ∴ لا يوجد جذور حقيقية          ∴ يوجد جذران مركبان

لاحظ أن

| المميز | نوع الجذرين | شكل تخطيطى للدالة المرتبطة بالمنحنى |
|---|---|---|
| (ب$^{٢}$ − ٤أجـ) > ٠ | جذران حقيقيان مختلفان |     |
| ب$^{٢}$ − ٤أجـ = ٠ | جذر حقيقى واحد مكرر (جذران متساويان) |     |
| ب$^{٢}$ − ٤أجـ < ٠ | جذران مركبان |     |

## حاول أن تحل

عين نوع جذرى كل من المعادلات التربيعية التالية :

① ٦س$^{٢}$ = ١٩س − ١٥          ② ١٢س − ٤س$^{٢}$ = ٩

③ س ( س − ٢ ) = ٥          ④ س ( س + ٥ ) = ٢ ( س − ٧ )

**مثال [٢]**

اثبت أن جذرى المعادلة : ٢س٢ − ٣س + ٢ = ٠ مركبان ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين .

**الحل** ∵ ﺃ = ٢ ، ب = −٣ ، جـ = ٢

∵ المميز = ب٢ − ٤ ﺃ جـ = ( −٣ )٢ − ٤ × ( ٢ ) × ( ٢ ) = ٩ − ١٦ = −٧

∵ المميز يساوى عدد سالب ∴ لا يوجد جذور حقيقية ∴ يوجد جذران مركبان

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ﺃ جـ}}{٢ﺃ} = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{(-٣)^٢ - ٤ \times ٢ \times ٢}}{٢ \times ٢}$$

$$= \frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ١٦}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{-٧}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}\,ت}{٤} = \frac{٣}{٤} \pm \frac{\sqrt{٧}}{٤}ت$$

الجذران هما : $\frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{٧}}{٤}ت$ ، $\frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٧}}{٤}ت$

**مثال [٣]**

اثبت أنه لجميع قيم ﺃ الحقيقية لا يكون للمعادلة : ٤س٢ − ١٢ﺃ س + ٩ﺃ٢ + ٤ = ٠ جذور حقيقية ثم أوجد الجذرين

∵ المميز = ب٢ − ٤ ﺃ جـ = ( −١٢ﺃ )٢ − ٤ ( ٤ ) ( ٩ﺃ٢ + ٤ )

= ١٤٤ﺃ٢ − ١٤٤ﺃ٢ − ٦٤ = −٦٤ ( كمية سالبة لجميع قيم ﺃ )

∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ ﺃ جـ}}{٢ﺃ} = \frac{-(-١٢ﺃ) \pm \sqrt{-٦٤}}{٢ \times ٤}$$

$$= \frac{١٢ﺃ \pm ٨ت}{٨} = \frac{٣ﺃ \pm ٢ت}{٢} = \frac{٣ﺃ}{٢} \pm \frac{٢ت}{٢} = \frac{٣ﺃ}{٢} \pm ت$$

الجذران هما : $\frac{٣ﺃ}{٢} - ت$ ، $\frac{٣ﺃ}{٢} + ت$

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

**مثال [٤]**

إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين اثبت أن جذرى المعادلة : أ س$^{٢}$ + ( أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ ) س + أ ب$^{٢}$ = ٠ نسبيان .

∵ المميز = = ( أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ )$^{٢}$ − ٤ × أ × أ ب$^{٢}$

= أ$^{٤}$ + ٢ أ$^{٢}$ ب$^{٢}$ + ب$^{٤}$ − ٤ أ$^{٢}$ ب$^{٢}$ = أ$^{٤}$ − ٢ أ$^{٢}$ ب$^{٢}$ + ب$^{٤}$

= ( أ$^{٢}$ − ب$^{٢}$ )$^{٢}$ = كمية مربع كامل

∴ المعاملات أعداد نسبية والمميز مربع كامل    ∴ جذرا المعادلة عددان نسبيان .

**مثال [٥]**

أوجد قيم العدد الحقيقى م التى تحقق أن المعادلة : س$^{٢}$ − ( ٢ م − ١ ) س + م$^{٢}$ = ٠ ليس لها جذور حقيقية .

∵ المعادلة ليس لها جذور حقيقية    ∴ ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ < صفر

∴ ( ٢ م − ١ )$^{٢}$ − ٤ م$^{٢}$ < ٠    ∴ ٤ م$^{٢}$ − ٤ م + ١ − ٤ م$^{٢}$ < ٠

∴ − ٤ م < − ١    ∴ م > $\frac{١}{٤}$

∴ المعادلة لا يكون لها جذور حقيقية اذا كانت م ∈ ] $\frac{١}{٤}$ ، ∞ [

**مثال [٦]**

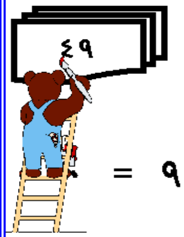
إذا كان جذرا المعادلة : س$^{٢}$ + ٢ ( ك − ١ ) س + ٩ = ٠ متساويان فأوجد قيم ك الحقيقية ، ثم تحقق من صحة الناتج .

∵ المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان    ∴ المميز = ٠

∵ المميز = ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = ٤( ك − ١ )$^{٢}$ − ٤ × ( ١ ) × ( ٩ ) = ٠

∴ ٤ ( ك$^{٢}$ − ٢ ك + ١ ) − ٣٦ = ٤ ك$^{٢}$ − ٨ ك + ٤ − ٣٦ = ٠

∴ ٤ ك$^{٢}$ − ٨ ك − ٣٢ = ٠    بالقسمة ÷ ٤    ∴ ك$^{٢}$ − ٢ ك − ٨ = ٠



( ك − ٤ ) ( ك + ٢ ) = ٠ ∴ ك = ٤ أو ك = −٢

**التحقيق** : عند ك = ٤ ∴ المعادلة تصبح : س$^{٢}$ + ٦ س + ٩ =

∴ ( س + ٣ )$^{٢}$ = ٠ ∴ س = −٣ ، س = −٣

∴ المعادلة لها جذران متساويان

**التحقيق** : عند ك = −٢ ∴ المعادلة تصبح : س$^{٢}$ − ٦س + ٩ = ٠

∴ ( س − ٣ )$^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٣ ، س = ٣

∴ المعادلة لها جذران متساويان

**مثال [٧]**

إذا كان جذرا المعادلة : س$^{٢}$ − ك س + ٢ك − ٤ س + ٥ = ٠ متساويان فأوجد قيمة ك الحقيقية ثم أوجد الجذرين

نضع المعادلة على الصورة العامة : ∴ س$^{٢}$ − ك س + ٢ك − ٤س + ٥ = ٠

∴ س$^{٢}$ − ( ك + ٤ ) س + ( ٢ ك + ٥ ) = ٠

∴ المميز = ( ك + ٤ )$^{٢}$ − ٤ × ١ × ( ٢ ك + ٥ )

= ك$^{٢}$ + ٨ ك + ١٦ − ٨ ك − ٢٠ = ك$^{٢}$ − ٤

∵ جذرى المعادلة متساويان ∴ المميز = صفر

∴ ك$^{٢}$ − ٤ = ٠ ∴ ك$^{٢}$ = ٤ ∴ ك = ± ٢

عند ك = ٢ ∴ المعادلة هى : س$^{٢}$ − ٦ س + ٩ = ٠

∴ ( س − ٣ )$^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٣

عند ك = ٢ يكون الجذران متساويين وكل منهما = ٣

عند ك = −٢ ∴ المعادلة هى : س$^{٢}$ − ٢س + ١ = ٠

∴ ( س − ١ )$^{٢}$ = ٠ ∴ س = ١

∴ عند ك = −٢ ويكون الجذران متساويين وكل منهما = ١

# تمارين ( ٤ ) على بحث نوع جذرى المعادلة

**[١] بدون حل أى من المعادلات الآتية بين نوع جذريها**

❶ $س^{٢} - ٤ س + ٢ = ٠$

❷ $٢س^{٢} + ٤ س - ١ = ٠$

❸ $٤٩ س^{٢} - ١٤س + ١ = ٠$

❹ $٢س^{٢} + ٣ س - ٧ = ٠$

❺ $س ( س - ١ ) = ٧$

❻ $٢ س^{٢} + س + ٦$

❼ $( س - ١١ ) - س ( س - ٦ ) = ٠$

❽ $( س - ١ )( س - ٧ ) = ٢( س - ٣ )( س - ٤ )$

❾ $س - \frac{٢}{س - ١} = ٤$ حيث $س \neq ١$

❿ $\frac{س}{س + ١} + \frac{٢}{س - ١} = ٣$ حيث $س \in ح - \{ ١ ، - ١ \}$

**[٢] بدون حل أى من المعادلات الآتية بين أيا منها لها جذران نسبيان وأيها لها جذران غير نسبيين**

❶ $س^{٢} - ٣ س - ٢ = ٠$

❷ $٤س^{٢} + ٦س - ٥ = ٠$

❸ $س^{٢} + \sqrt{٥} س - ٥ = ٠$

❹ $٤س^{٢} - ٨\sqrt{٧} س + ٣ = ٠$

❺ $٣( س - ١ ) - س ( س - ٣ ) = ١$

❻ $س - \frac{٢}{س} = ٣$ حيث $س \neq ٠$

[٣] إذا كان جذرا المعادلة : $٢ س^{٢} + ن س + ٥ = ٠$ متساويان **اوجد قيمة** ن [ $\pm ٢\sqrt{١٠}$ ]

[٤] إذا كان جذرا المعادلة : $٧٥ س^{٢} + ٧م س + ٣ = ٠$ متساويان **اوجد قيمة** م [ $\pm \frac{٣٠}{٧}$ ]

**[٥] أوجد قيمة م التى تجعل جذرى المعادلة :** $٣س^{٢} - ٦ س + م =$ متساويان [ ٣ ]

**[٦] إذا كان جذرا المعادلة :** $٢س^{٢} + ٥ س + ٤ن = ٠$ متساويان **فأوجد قيمة** ن [ $\frac{٢٥}{٣٢}$ ]

**[٧] أوجد قيمة جـ التى تجعل جذرى المعادلة** $٩س^{٢} - ١٢س + جـ =$ متساويين و أوجد الجذرين [ $٤ ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}$ ]

مع أرق تمنياتي بالنجاح والتفوق ... أ/ وليد رشدى

**[٨] إذا كان جذرا المعادلة :** س$^{٢}$ − ٢ك س + ٧ك − ٦س + ٩ = ٠ متساويين

**أوجد قيمة ك الحقيقة** [ صفر ، ١ ]

**[٩]** إذا كان : ا ، ب عددين نسبيين **فأثبت أن جذرى المعادلة :**

ا س$^{٢}$ + ب س + ب − ا = ٠ نسبيان

**[١٠]** إذا كان : ا ، ب عددين نسبيين **فأثبت أن جذرى المعادلة :**

ا س$^{٢}$ + ( ٢ ا − ب ) س − ٢ب = ٠ نسبيان

**[١١]** إذا كان : ا ، ب عددين نسبيين **فأثبت أن جذرى المعادلة :**

س$^{٢}$ + ا ( ا + ب ) س + ا$^{٣}$ ب = ٠ نسبيان

**[١٢]** إذا كان : ا ، ب عددين نسبيين **فأثبت أن جذرى المعادلة :**

س$^{٢}$ − ٢ ا$^{٣}$ س + ا$^{٦}$ − ب$^{٦}$ = ٠ نسبيان

**[١٣] اثبت أن إذا كان م عددا نسبيا فان جذرى المعادلة :**

٢٥س$^{٢}$ + ٥ ( م + ٣ ) س + ٣م = ٠ يكونان عددين نسبيين .

**[١٤] اثبت أنه إذا كان م عددا نسبيا فان جذرى المعادلة :**

س$^{٢}$ + ٢ ( م + ٢ ) س + ٨م = ٠ يكونان عددين متساويين

**[١٥] اثبت أن جذرى المعادلة :** س$^{٢}$ + م س + م = ١ دائما نسبيان حيث م ∈ ح

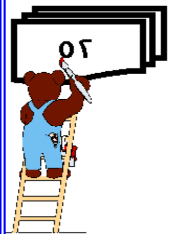
**[١٦] أوجد قيم ك التى تجعل للمعادلة :** ٥ س$^{٢}$ + ٤س + ك = ٠

❶ جذرين حقيقيين متساويين ؟ ❷ جذرين حقيقيين مختلفين

❸ جذرين غير حقيقيين .

**[١٧] أوجد قيم م الحقيقية التى تجعل للمعادلة :** ( م − ١) س$^{٢}$ − ٢ م س + م = ٠

ليس لها جذور حقيقية



[١٨] **اثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية عدا الصفر لا يكون للمعادلة :**

( أ$^{٢}$ + ١ ) س$^{٢}$ − ٢ أ$^{٣}$ س + أ$^{٤}$ = ٠ جذور حقيقية

[١٩] **إذا كانت المعادلة :** س$^{٢}$ = م + ٢ لها جذران حقيقيان مختلفان **أوجد قيم** ك

[٢٠] **اثبت أنه لجميع قيم أ ، ب الحقيقية يكون جذرا المعادلة :**

( س − أ )( س − ب ) = ٥ حقيقيين .

[٢١] **اثبت أن : لجميع قيم أ الحقيقية ما عدا ( أ = ٢ ) يكون للمعادلة :**

( أ − ١ ) س$^{٢}$ − أ س + ١ = ٠ جذران حقيقيان مختلفان .

[٢٢] **أوجد الفترة التى تنتمى إليها أ والتى تجعل جذرى المعادلة :**

( أ + ٢ ) س$^{٢}$ + ( ٢ أ + ٣ ) س + أ − ١ = ٠ حقيقيين

[٢٣] **إذا كانت أ ، ب ، جـ أعدادا حقيقية فأثبت أن جذرى المعادلة :**

س$^{٢}$ + ٢ أ س + أ$^{٢}$ − ب$^{٢}$ − جـ$^{٢}$ = ٠ حقيقيان .

[٢٤] **اثبت أن جذرى العادلة :** $\frac{١}{س + أ} = \frac{١}{س} + \frac{١}{أ}$ دائما غير حقيقيين إذا كانت أ ∈ ح$^{*}$، س ∈ { ٠ ، −أ }

[٢٥] **حاول أن تحل**

١) اثبت أن : جذرى المعادلة ٧ س$^{٢}$ − ١١ س + ٥ = ٠ مركبان ثم استخدم القانون العام فى إيجادهما .

١) اثبت أن : جذرى المعادلة ٢ س$^{٢}$ − ٥ س + ٩ = ٠ مركبان ثم استخدم القانون العام فى إيجادهما .

١) اثبت أن : جذرى المعادلة ٣ س − س$^{٢}$ − ٨ = ٠ مركبان ثم استخدم القانون العام فى إيجادهما .

## [٢٦] تفكير ناقد

هل بالضرورة أن يكون جذرا المعادلة التربيعية فى مجموعة الأعداد المركبة عددين مترافقين ؟
وضح بمثال من عندك .

## [٢٧] حاول أن تحل :

إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ - ٢ك\,س + ٧ك - ٦س + ٩ = ٠$ متساويان ، فأوجد قيم ك الحقيقية ، ثم أوجد الجذرين .

## [٢٨] تحقق مع فهمك

① الربط بالصحة :

تقوم منظمة الصحة العالمي ة بجهود كبيرة لتوعية بأخطاء أمراض الكبد الوبائى ، وفى دراسة قامت بها فى أحد البلدان من بين ١٠٠٠٠ شخص فى أحد الأعمال كانت نتائجها كما هو مبين من الجدول المقابل وتمثل المعادلة :

$$ص = - ٢,٥\,ن^٢ - ٧,٥\,ن + ٩٤٥$$

عدد المصابين ، حيث ن تمثل عدد السنوات بعد عام ٢٠٠٥

| العام | عدد الإصابات لكل ١٠٠٠٠ شخص |
|---|---|
| ٢٠٠٥ | ٩٤٥ |
| ٢٠٠٧ | ٩٢٠ |
| ٢٠١٠ | ٨٤٥ |
| ٢٠١٤ | |
| ٢٠٢٠ | |

❶ احسب عدد المصابين فى عامى ٢٠١٤ ، ٢٠٢٠

❷ أوجد باستخدام القانون العام قيمة ن عندما ص = ٤٩٥

❸ متى يصبح عدد المصابين مساويا الصفر ؟ وهل هذا التوقع معقول ؟ فسر إجابتك ؟